

# Fundamentos. Circuitos de Corriente Continua.

## Teoría de Circuitos

Oscar Perpiñán Lamigueiro

① Conceptos Fundamentales

② Elementos circuitales

③ Leyes de Kirchhoff

④ Métodos de Análisis

# ① Conceptos Fundamentales

Teoría de Circuitos

Variables

② Elementos circuitales

③ Leyes de Kirchhoff

④ Métodos de Análisis

Este curso está dedicado al **análisis** de **circuitos eléctricos lineales** de **parámetros concentrados**.

# Circuito Eléctrico

Un **circuito eléctrico** es un conjunto de componentes eléctricos interconectados mediante conductores que crean un camino cerrado por el que puede circular corriente eléctrica.

Un circuito eléctrico puede incluir:

- ▶ **elementos activos** (generadores), que entregan potencia al circuito
- ▶ **elementos pasivos** (receptores), que consumen o almacenan la potencia que circula.

# Análisis y Diseño

El **análisis** (o resolución) de un circuito eléctrico existente persigue determinar sus condiciones de funcionamiento:

- 1 Definir las ecuaciones correspondientes al circuito,
- 2 Obtener los valores de determinadas variables importantes a partir de dichas ecuaciones.

El **diseño** (o síntesis) de un circuito eléctrico tiene como objetivo definir el circuito eléctrico, es decir, determinar los componentes necesarios y su interconexión, para obtener unas condiciones de funcionamiento.

# Sistemas lineales

Todos los circuitos eléctricos que se estudian en este curso se comportan como **sistemas lineales**:

▶  $f(x + y) = f(x) + f(y)$

La respuesta  $f$  a la suma de dos entradas  $x$  e  $y$  es igual a la suma de la respuesta individual a cada una de las entradas

▶  $f(k \cdot x) = k \cdot f(x)$

La respuesta a una entrada que está multiplicada por un factor de escala  $k$  es igual a multiplicar por este factor a la respuesta a la entrada.

# La linealidad es una aproximación de la realidad

- ▶ Estas propiedades simplifican el tratamiento de los circuitos, y **permiten aplicar técnicas de resolución de ecuaciones lineales**.
- ▶ La linealidad es una **aproximación de la realidad** que no puede aplicarse de manera indiscriminada a cualquier componente y en cualquier condición.
- ▶ En particular, los **dispositivos electrónicos** como diodos o transistores tienen un **comportamiento** marcadamente **no lineal**, de forma que los circuitos que los contienen no pueden analizarse directamente con las técnicas que aquí se exponen sin realizar previamente aproximaciones de su funcionamiento.

## Parámetros concentrados

- ▶ Los circuitos eléctricos reales ocupan espacio, las máquinas generadoras y los receptores tienen grandes dimensiones, y los cables conductores se extienden a lo largo de longitudes variopintas.
- ▶ Sin embargo, el análisis de circuitos no toma en consideración las propiedades espaciales de los circuitos ni de sus componentes, sino que los confina a elementos puntuales con un modelo de **parámetros concentrados**.
- ▶ Por ejemplo, un conductor real de 100 m se representará habitualmente como un conductor ideal con una resistencia en su punto medio.

# Simplificación de las ecuaciones de Maxwell

- ▶ Este tratamiento es una simplificación de las ecuaciones del electromagnetismo de Maxwell
- ▶ Es aplicable únicamente cuando las dimensiones del circuito real son inferiores a la longitud de onda de la señal que circula por el circuito.
- ▶ Por ejemplo:
  - ▶ A la frecuencia de 50 Hz, habitual en sistemas eléctricos industriales, la longitud de onda de la señal es de 6000 km.
  - ▶ A la frecuencia de 2,6 GHz, característica de la telefonía 4G, la longitud de onda se reduce a 11,5 cm.

# ① Conceptos Fundamentales

Teoría de Circuitos

Variables

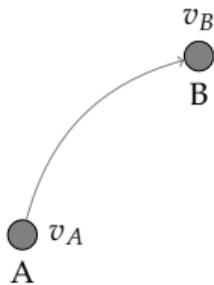
② Elementos circuitales

③ Leyes de Kirchhoff

④ Métodos de Análisis

## Tensión Eléctrica

El **potencial eléctrico en un punto**,  $v(t)$ , es la energía potencial que tiene una carga unitaria en ese punto debida al campo eléctrico.



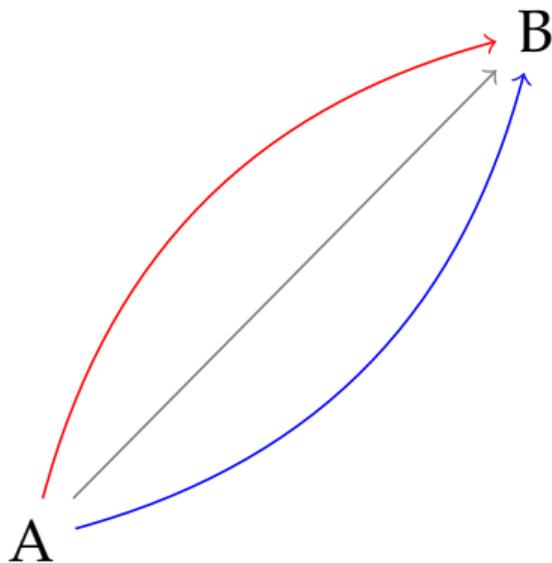
La **tensión o diferencia de potencial entre dos puntos** A y B,  $u_{AB}(t)$ , es el trabajo realizado por el campo eléctrico al desplazar una carga unitaria entre esos puntos.

$$u_{AB}(t) = v_A(t) - v_B(t) = \frac{dW_e}{dq}$$

La **unidad** de la tensión eléctrica es el **voltio** (V).

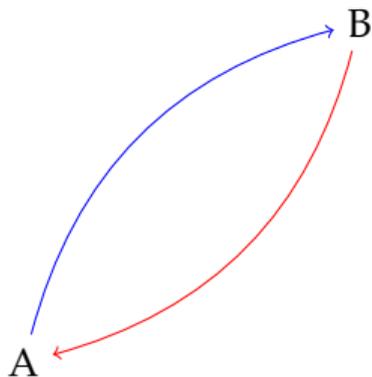
## La trayectoria no importa

Dado que el campo eléctrico es **conservativo**, la diferencia de potencial entre A y B **no depende de la trayectoria** seguida para realizar el desplazamiento, sino únicamente del potencial existente en cada uno de los puntos.



## El signo depende del sentido

Aunque la trayectoria no sea relevante para el cálculo de la tensión, siempre hay que tener en cuenta el **sentido del desplazamiento**.



Así, si el movimiento se produce desde B hasta A obtenemos el signo contrario al anterior resultado:

$$u_{BA} = v_B - v_A = -u_{AB}$$

## Corriente Eléctrica

Se define la **intensidad de la corriente eléctrica** como la variación de la carga  $q(t)$  que atraviesa la sección transversal de un conductor por unidad de tiempo:

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$$



La corriente eléctrica se produce por el **movimiento de los electrones libres** que fluyen por el conductor. Sin embargo, por razones históricas, el **convenio** que se se emplea considera como sentido de la corriente el debido al **movimiento de las cargas positivas**.

La **unidad** de la corriente es el **amperio** (A).

# Potencia Eléctrica

La **potencia eléctrica** es la variación del trabajo del campo eléctrico por unidad de tiempo:

$$p(t) = \frac{dW_e}{dt}$$

Esta definición genérica puede relacionarse con las anteriores variables:

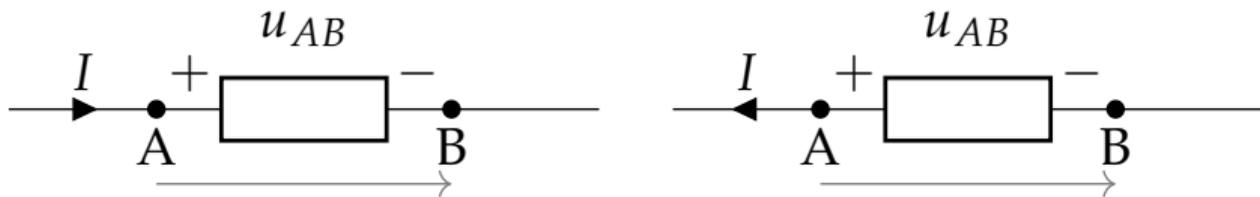
$$\begin{aligned} p(t) &= \frac{dW_e}{dq} \cdot \frac{dq(t)}{dt} \\ &= v(t) \cdot i(t) \end{aligned}$$

La **unidad** de la potencia eléctrica es el **vatio** (W).

## Signo de la potencia eléctrica

Para determinar el **signo de la potencia eléctrica** hay que tener en consideración los signos de las variables de las que depende, la tensión y la corriente.

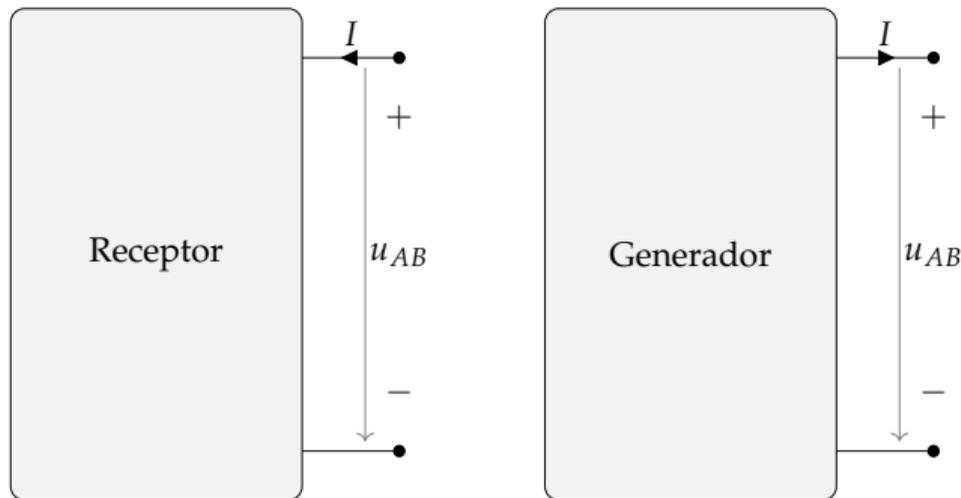
- ▶ Cuando las flechas de ambas variables tienen el **mismo sentido** la potencia eléctrica es **positiva**
- ▶ Cuando las flechas tienen **sentidos opuestos** la potencia eléctrica es **negativa**.



# Receptores y Generadores

Es habitual **interpretar** este resultado en términos de potencia absorbida o potencia entregada.

- ▶ Un **circuito receptor absorbe potencia** y la corriente *entra* por el terminal de mayor potencial,
- ▶ Un **circuito generador entrega potencia** y la corriente *sale* por el terminal de mayor potencial.



# Potencia y Energía

**Energía** es la capacidad para realizar un trabajo.

Unidades Wh, kWh

1 kWh = 3.6 MJ

**Potencia** es la cantidad de trabajo efectuado *por unidad de tiempo*.

Unidades W, kW

# Rendimiento/Eficiencia

Cuadripolo (entrada/salida)

$$\eta = \frac{P_{salida}}{P_{entrada}}$$

Receptor

$$\eta_m = \frac{P_{util}}{P_{absorbida}}$$

Generador

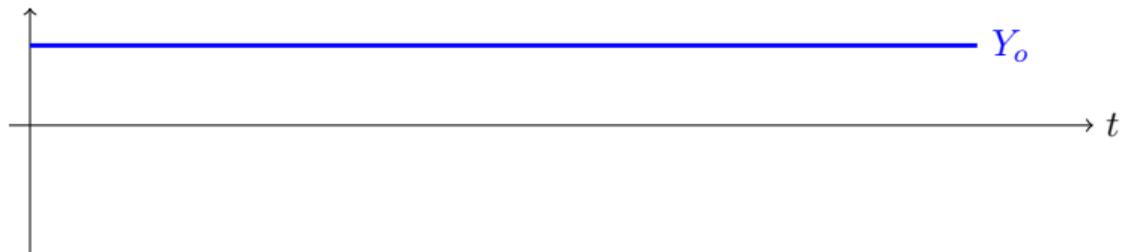
$$\eta_g = \frac{P_{entregada}}{P_{producida}}$$

Cualquier máquina tiene pérdidas:

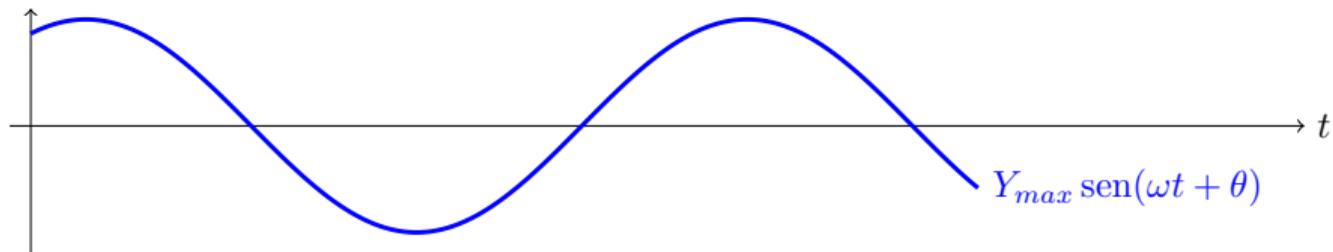
$$\eta < 1$$

# Corriente Continua y Corriente Alterna

- ▶ Corriente Continua ( $\frac{d}{dt} = 0$ )



- ▶ Corriente Alterna ( $\frac{d}{dt} \neq 0$ )



① Conceptos Fundamentales

② Elementos circuitales

③ Leyes de Kirchhoff

④ Métodos de Análisis

① Conceptos Fundamentales

② Elementos circuitales

Elementos Pasivos

Generadores Independientes

Generadores Dependientes

③ Leyes de Kirchhoff

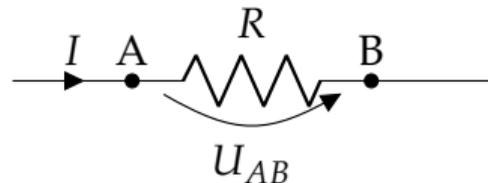
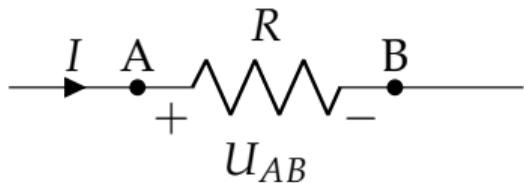
④ Métodos de Análisis

# Resistencia

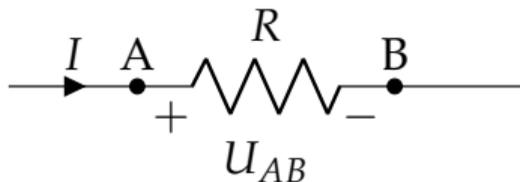
- ▶ **Ley de Ohm:** una resistencia provoca una **diferencia de potencial** entre sus terminales **directamente proporcional** a su corriente: **resistencia** (Ohmios, [ $\Omega$ ])

$$u(t) = R \cdot i(t)$$

- ▶ **Criterio de Signos:** la tensión es positiva en el terminal por el que entra la corriente (las flechas de tensión y corriente tienen el mismo sentido).



# Ley de Joule



- **Ley de Joule:** una resistencia disipa energía eléctrica produciendo **calor**.

$$p(t) = R \cdot i^2(t)$$

# Resistividad

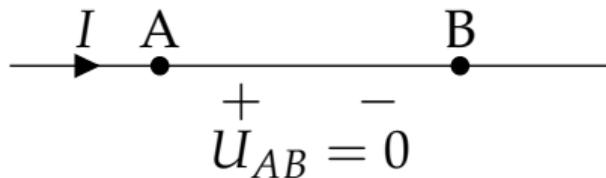
- ▶ El valor de la resistencia depende de la **resistividad del material** ( $\rho$ ), de la **sección** ( $S$ ), y de la longitud ( $l$ ):

$$R = \rho \cdot \frac{l}{S}$$

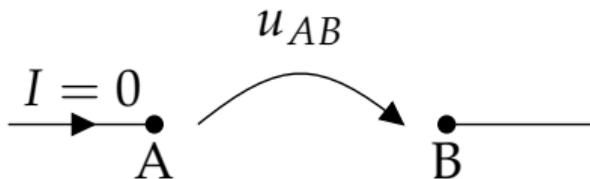
- ▶ La **sección** se expresa en  $\text{mm}^2$ .
- ▶ La **resistividad** depende del material conductor y de la temperatura ambiente:
  - ▶ Cobre a  $20^\circ\text{C}$ :  $17,24 \text{ m}\Omega \text{ mm}^2 \text{ m}^{-1}$ .

## Cortocircuito y Circuito Abierto

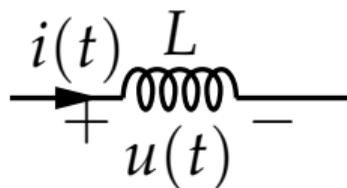
- ▶ Cortocircuito: resistencia nula (tensión nula)



- ▶ Circuito abierto: resistencia infinita (corriente nula).



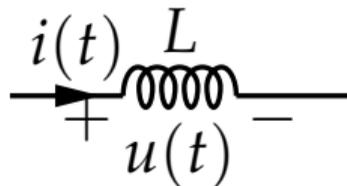
## Bobina o inductancia



- ▶ Cuando una corriente oscilante atraviesa un conductor arrollado alrededor de un núcleo, se produce una **tensión inducida que se opone a esta corriente** (ley de Faraday y Lenz)
- ▶ La tensión en sus terminales es directamente proporcional al cambio de la corriente: coeficiente de autoinducción o **inductancia** (Henrios [H]).

$$u_L(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt}$$

## Bobina o inductancia



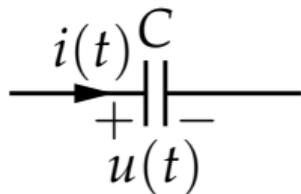
- ▶ Almacena **energía magnética**.

$$E_L(t) = \int_{-\infty}^t u(\tau) \cdot i(\tau) d\tau = \frac{1}{2} \cdot L \cdot i^2(t)$$

- ▶ En circuitos de corriente continua es un cortocircuito.

$$\frac{di(t)}{dt} = 0 \Rightarrow U_L = 0$$

# Condensador



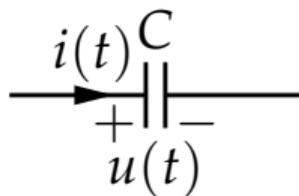
- ▶ Un **condensador** está formado por dos placas metálicas separadas por una capa dieléctrica. Al aplicar tensión se produce una **separación de cargas opuestas** que se **acumulan** en cada placa.
- ▶ La **carga acumulada** en un instante es **proporcional** a la **diferencia de potencial** en ese instante: **capacidad** (Faradios [F]).

$$q(t) = C \cdot u(t)$$

- ▶ En el proceso de carga se produce una corriente eléctrica entre las dos placas.

$$i_C(t) = \frac{dq(t)}{dt} = C \frac{du(t)}{dt}$$

# Condensador



- ▶ Un condensador almacena **energía eléctrica**

$$E_c(t) = \int_{-\infty}^t u(\tau) \cdot i(\tau) d\tau = \frac{1}{2} \cdot C \cdot u^2(t)$$

- ▶ En un circuito de corriente continua se comporta como un circuito abierto.

$$\frac{du(t)}{dt} = 0 \Rightarrow I_c = 0$$

① Conceptos Fundamentales

② Elementos circuitales

Elementos Pasivos

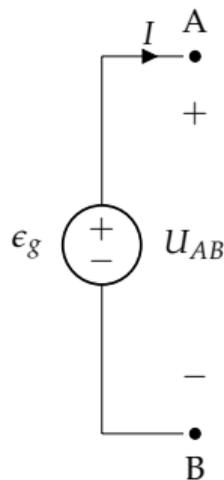
**Generadores Independientes**

Generadores Dependientes

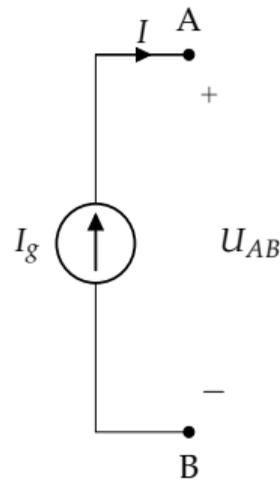
③ Leyes de Kirchhoff

④ Métodos de Análisis

# Generador Ideal



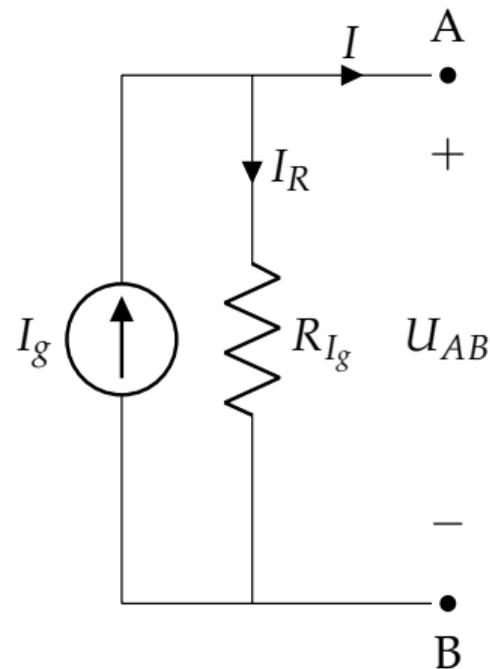
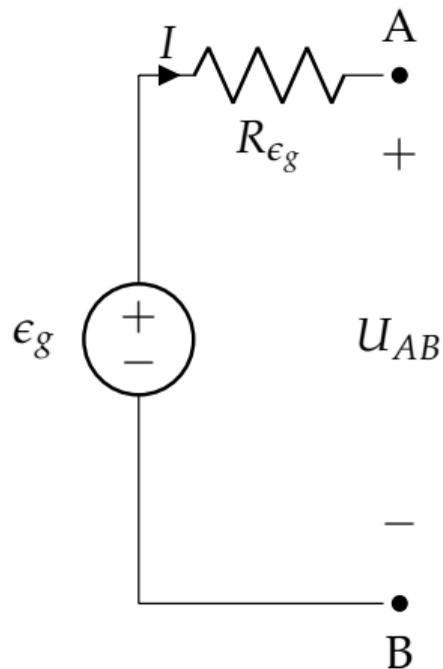
Un **generador de tensión ideal** impone la tensión a la salida (*la corriente depende del circuito*). Se caracteriza por su **fuerza electromotriz** (voltios [V]).



Un **generador de corriente ideal** impone la corriente a la salida (*la tensión depende del circuito*). Se caracteriza por su corriente de generador.

## Generador Real

Los generadores reales tienen pérdidas que se modelan con una resistencia en **serie** (generador de tensión) o en **paralelo** (generador de corriente)



① Conceptos Fundamentales

② Elementos circuitales

Elementos Pasivos

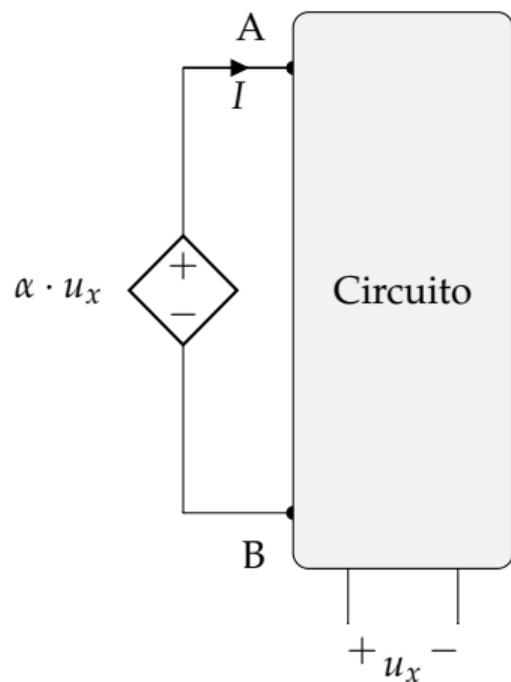
Generadores Independientes

Generadores Dependientes

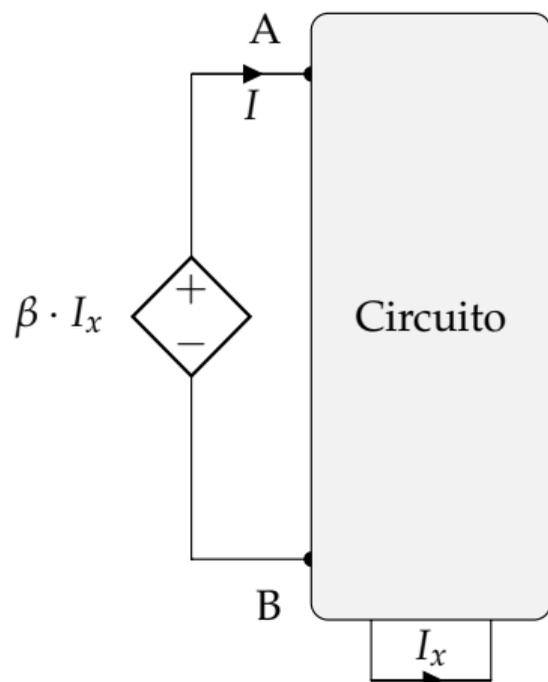
③ Leyes de Kirchhoff

④ Métodos de Análisis

# Generadores de Tensión

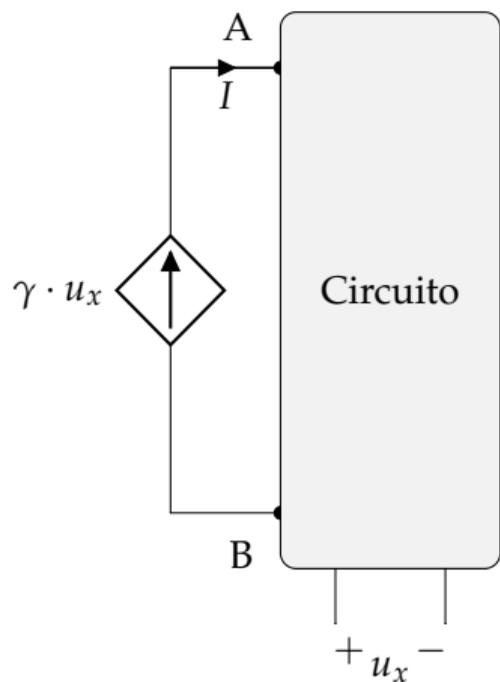


... de Tensión

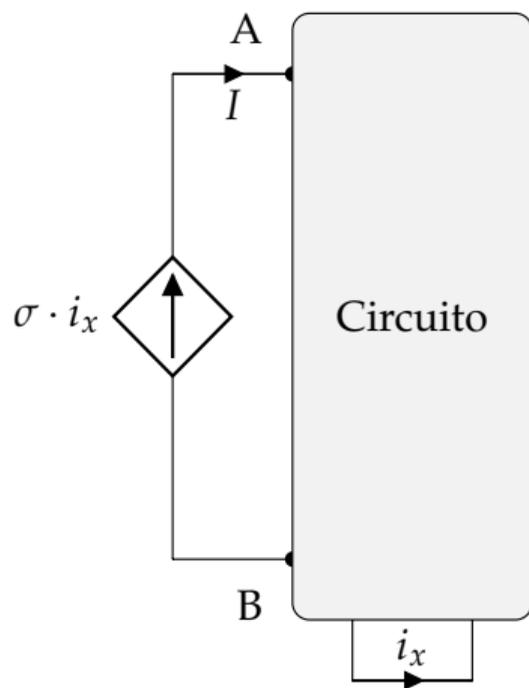


... de Corriente

# Generadores de Corriente



... de Tensión



... de Corriente

① Conceptos Fundamentales

② Elementos circuitales

③ Leyes de Kirchhoff

④ Métodos de Análisis

① Conceptos Fundamentales

② Elementos circuitales

③ Leyes de Kirchhoff

Definiciones

Generadores

Asociación de Elementos

④ Métodos de Análisis

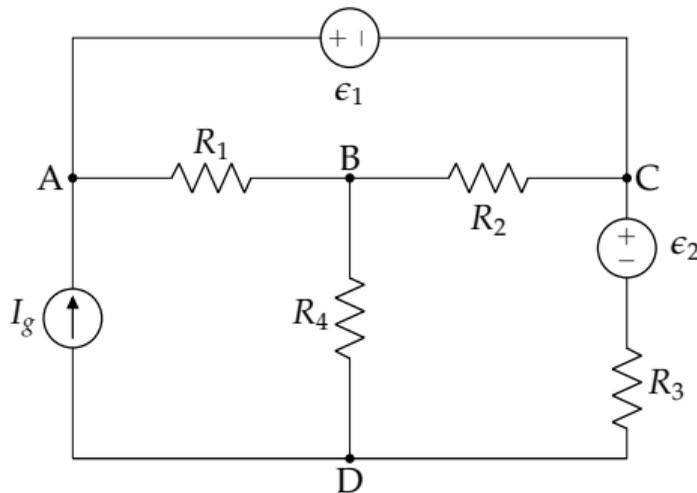
# Nudo, rama, malla

**Nudo** unión de **3** o más conductores.

**Rama** elementos conectados entre dos nudos consecutivos.

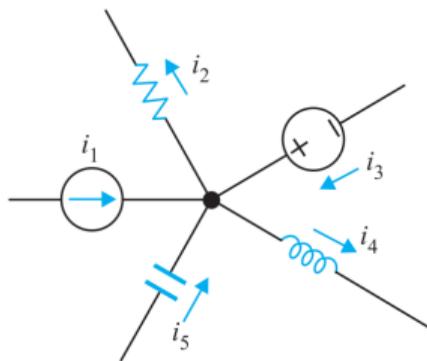
**Lazo** conjunto de ramas que forman un camino cerrado.

**Malla** lazo que no contiene ningún otro en su interior.



## Ley de Kirchhoff de las Corrientes (LKC)

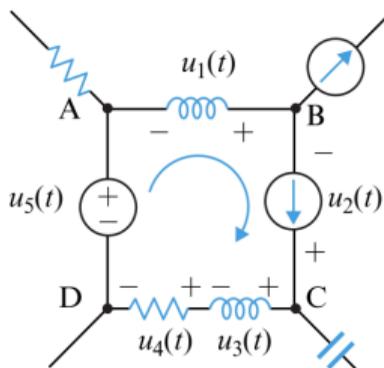
- ▶ La **LKC** es el principio de conservación de la carga aplicado a los circuitos eléctricos.
- ▶ **LKC**: la suma de las corrientes que llegan a un nudo es igual a la suma de las que salen.
  - ▶ Las líneas de corriente son cerradas (o solenoidales).



$$i_1(t) - i_2(t) + i_3(t) - i_4(t) + i_5(t) = 0$$

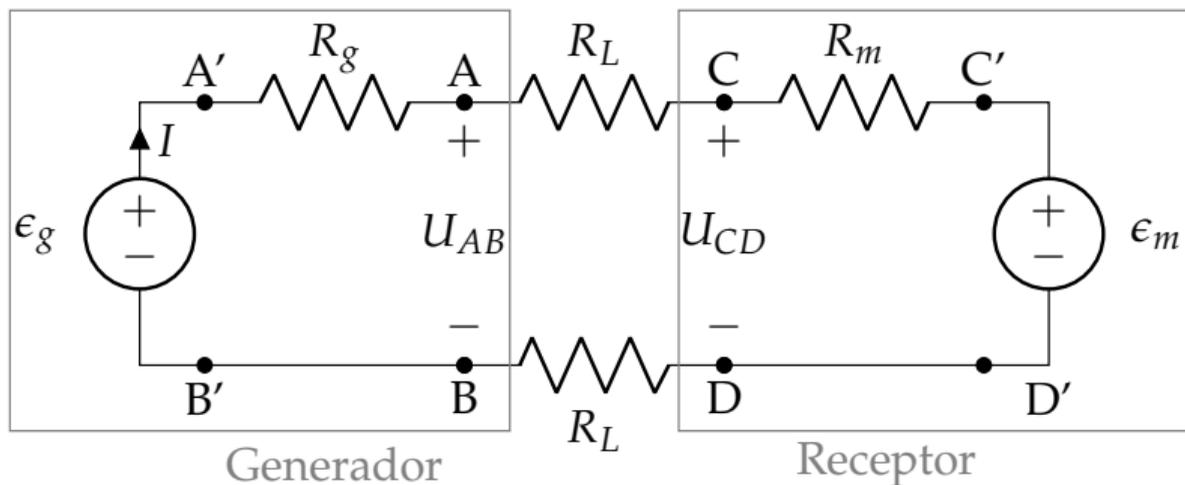
## Ley de Kirchhoff de los Voltajes (LKV)

- ▶ La **LKV** es el principio de conservación de la energía aplicado a los circuitos eléctricos.
- ▶ **LKV**: la suma (con signo) de las tensiones a lo largo de un camino cerrado (circuito) es cero.
  - ▶ La energía producida por un generador es consumida por los receptores del circuito para producir trabajo (mecánico, químico, etc.) o calor.



$$u_3(t) + u_4(t) - u_5(t) - u_1(t) - u_2(t) = 0$$

## Balance de Tensiones

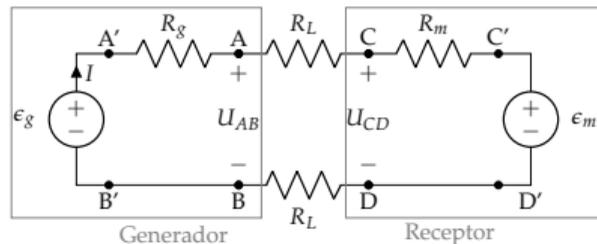


$$U_{A'A} + U_{AC} + U_{CC'} + U_{C'D'} + U_{D'D} + U_{DB} + U_{BB'} + U_{B'A'} = 0$$

$$U_{AB} = U_{AA'} + U_{A'B'} + U_{B'B}$$

$$U_{CD} = U_{CC'} + U_{C'D'} + U_{D'D}$$

# Balance de Tensiones



$$U_{A'A} + U_{AC} + U_{CC'} + U_{C'D'} + U_{D'D} + U_{DB} + U_{BB'} + U_{B'A'} = 0$$

$$U_{A'A} = I \cdot R_g$$

$$U_{AC} = I \cdot R_L$$

$$U_{CC'} = I \cdot R_m$$

$$U_{C'D'} = \epsilon_m$$

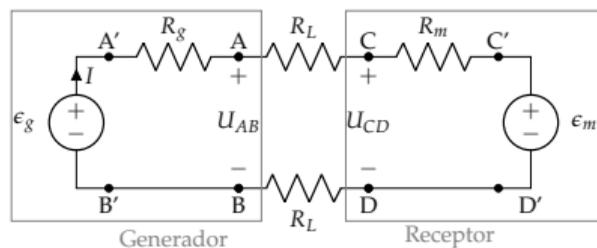
$$U_{D'D} = 0 = U_{BB'}$$

$$U_{DB} = I \cdot R_L$$

$$U_{B'A'} = -\epsilon_g$$

$$I \cdot (R_g + 2 \cdot R_L + R_m) + \epsilon_m = \epsilon_g$$

# Generador y Receptor



$$U_{A'A} = I \cdot R_g$$

$$U_{AC} = I \cdot R_L$$

$$U_{CC'} = I \cdot R_m$$

$$U_{C'D'} = \epsilon_m$$

$$U_{D'D} = 0 = U_{BB'}$$

$$U_{DB} = I \cdot R_L$$

$$U_{B'A'} = -\epsilon_g$$

$$U_{AB} = U_{AA'} + U_{A'B'} + U_{B'B}$$

$$U_{AB} = \epsilon_g - I \cdot R_g$$

$$U_{CD} = U_{CC'} + U_{C'D'} + U_{D'D}$$

$$U_{CD} = \epsilon_m + I \cdot R_m$$

① Conceptos Fundamentales

② Elementos circuitales

③ Leyes de Kirchhoff

Definiciones

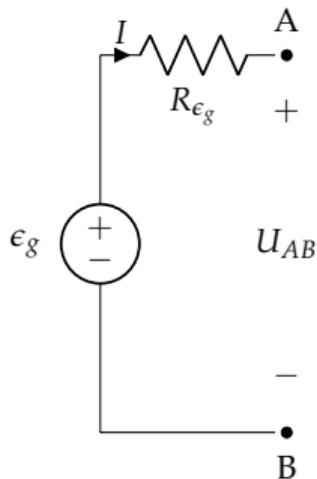
**Generadores**

Asociación de Elementos

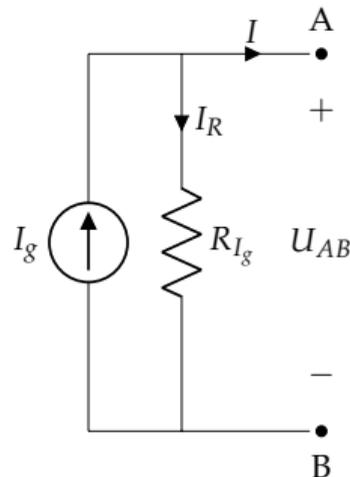
④ Métodos de Análisis

## Ecuación del generador

Los generadores reales tienen pérdidas que se modelan con una resistencia en **serie** (generador de tensión) o en **paralelo** (generador de corriente)

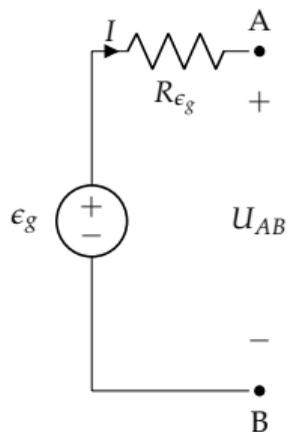


$$U_{AB} = \epsilon_g - R_{\epsilon_g} \cdot I$$

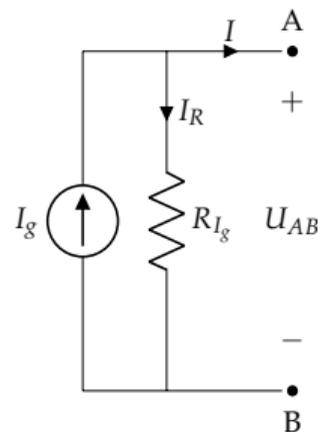


$$I = I_g - \frac{U_{AB}}{R_{I_g}}$$

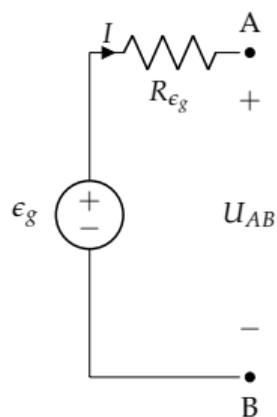
# Equivalencia de Fuentes



- ▶ Dos fuentes son equivalentes cuando suministran el mismo valor de tensión y corriente a un **circuito externo**, para cualquier circuito.
- ▶ Sólo es posible establecer equivalencia entre **fuentes reales**.



# Equivalencia de Fuentes



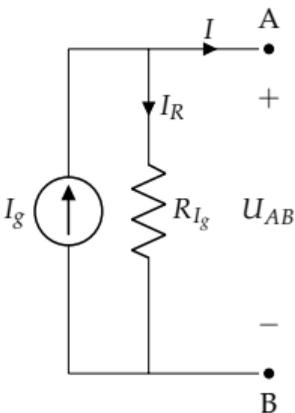
La salida de tensión de una fuente de tensión es:

$$U_{AB} = \epsilon_g - R_{\epsilon_g} \cdot I$$

Y de una fuente de corriente:

$$I = I_g - \frac{U_{AB}}{R_{I_g}} \rightarrow U_{AB} = R_{I_g} \cdot I_g - R_{I_g} \cdot I$$

Las fuentes son equivalentes cuando las ecuaciones coinciden para cualquier combinación  $(U_{AB}, I)$ :



$$R_g = R_{\epsilon_g} = R_{I_g}$$

$$\epsilon_g = R_g \cdot I_g \Leftrightarrow I_g = \frac{\epsilon_g}{R_g}$$

① Conceptos Fundamentales

② Elementos circuitales

③ Leyes de Kirchhoff

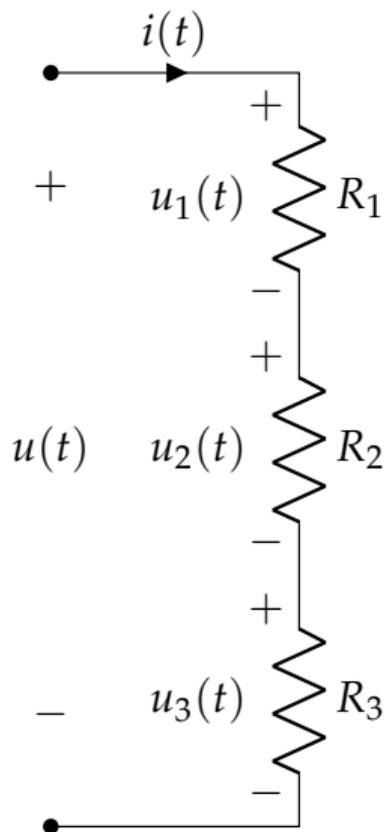
Definiciones

Generadores

Asociación de Elementos

④ Métodos de Análisis

## Conexión en serie



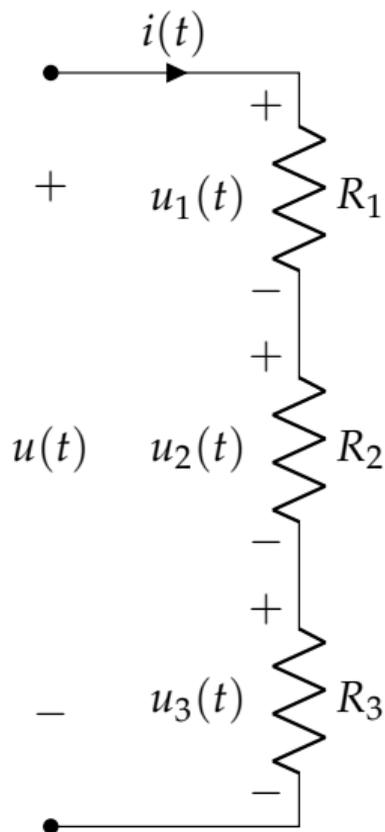
Un conjunto de elementos están asociados en serie cuando circula la misma corriente por todos ellos.

$$u_1(t) = R_1 \cdot i(t)$$

$$u_2(t) = R_2 \cdot i(t)$$

$$u_3(t) = R_3 \cdot i(t)$$

## Conexión en serie



Aplicando LKV:

$$u(t) = u_1(t) + u_2(t) + u_3(t)$$

Sacando  $i(t)$  como factor común:

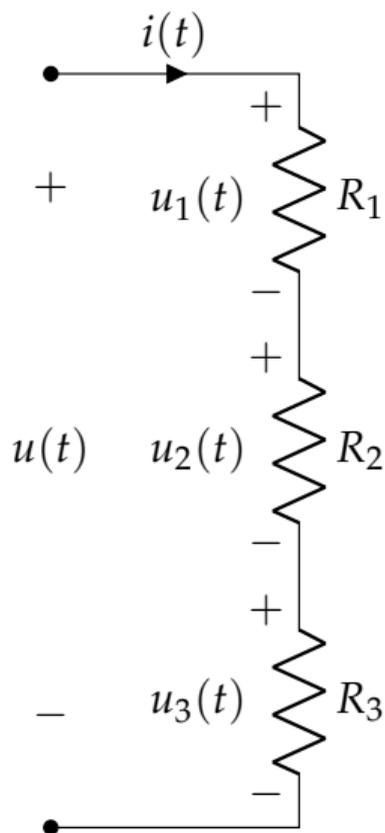
$$u(t) = i(t) \cdot (R_1 + R_2 + R_3)$$

Definimos la resistencia equivalente de la conexión serie:

$$R_s = \sum_{i=1}^n R_i$$

$$u(t) = R_s \cdot i(t)$$

## Divisor de Tensión



De las ecuaciones anteriores tenemos:

$$i(t) = \frac{u(t)}{R_1 + R_2 + R_3}$$

$$u_3(t) = R_3 \cdot i(t)$$

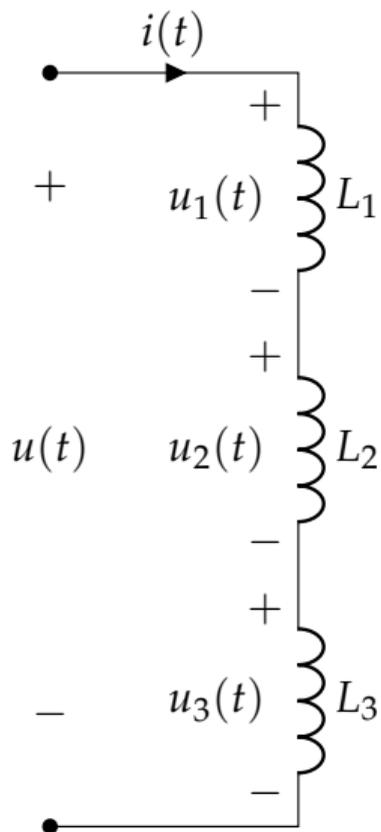
Por tanto, la tensión parcial  $u_3(t)$  se puede expresar en función de la tensión total  $u(t)$ :

$$u_3(t) = u(t) \cdot \frac{R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

En general:

$$u_o(t) = u(t) \cdot \frac{R_o}{R_s}$$

## Conexión en serie de inductancias



$$u_1(t) = L_1 \cdot \frac{di(t)}{dt}$$

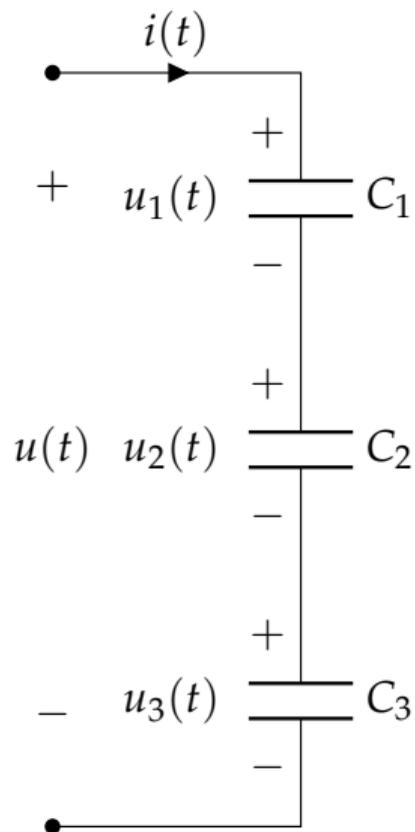
$$u_2(t) = L_2 \cdot \frac{di(t)}{dt}$$

$$u_3(t) = L_3 \cdot \frac{di(t)}{dt}$$

$$L_S = \sum_{i=1}^n L_i$$

$$u(t) = L_S \cdot \frac{di(t)}{dt}$$

## Conexión en serie de condensadores



$$i(t) = C_1 \cdot \frac{du_1(t)}{dt}$$

$$i(t) = C_2 \cdot \frac{du_2(t)}{dt}$$

$$i(t) = C_3 \cdot \frac{du_3(t)}{dt}$$

$$\boxed{\frac{1}{C_s} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}}$$

$$i(t) = C_s \cdot \frac{du(t)}{dt}$$

# Conexión en serie de generadores

## Generadores de Tensión

- ▶ Pueden conectarse en serie sin restricción.

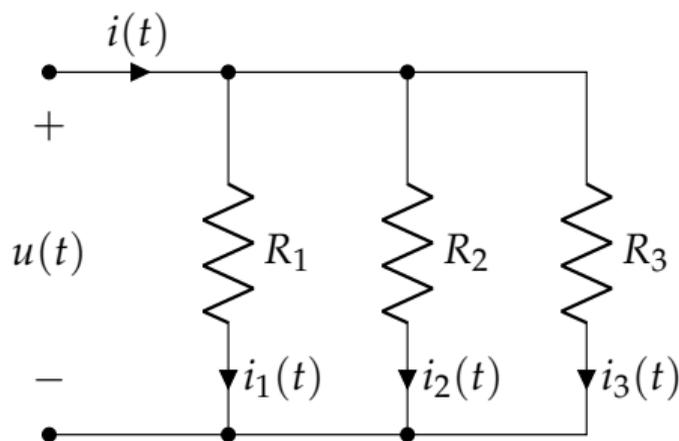
$$\epsilon_T = \sum_{i=1}^N \epsilon_i$$
$$R_{gT} = \sum_{i=1}^N R_{gi}$$

## Generadores de Corriente

- ▶ Ideal: todas las fuentes deben ser idénticas (valor y sentido).
- ▶ Real: sin restricción, transformación de fuentes para fuente equivalente.

## Conexión en paralelo

Un conjunto de elementos están asociados en paralelo cuando están sometidos a la misma diferencia de potencial.

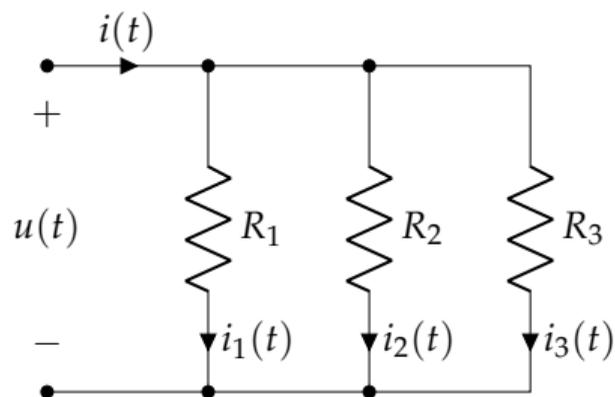


$$i_1(t) = u(t)/R_1$$

$$i_2(t) = u(t)/R_2$$

$$i_3(t) = u(t)/R_3$$

## Conexión en paralelo



Aplicando LKC:

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t) + i_3(t)$$

Sacando  $u(t)$  como factor común:

$$i(t) = u(t) \cdot \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right)$$

Definimos la resistencia equivalente de la conexión paralelo:

$$\boxed{\frac{1}{R_p} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i}}$$

$$u(t) = R_p \cdot i(t)$$

## Dos resistencias en paralelo

En el caso concreto de **dos** resistencias en paralelo ...

$$\frac{1}{R_p} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

... la expresión es:

$$R_p = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

## Conductancia

Para facilitar las operaciones es conveniente utilizar el inverso de la resistencia:

$$G = \frac{1}{R}$$

Así, en lugar de...

$$\frac{1}{R_p} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i}$$

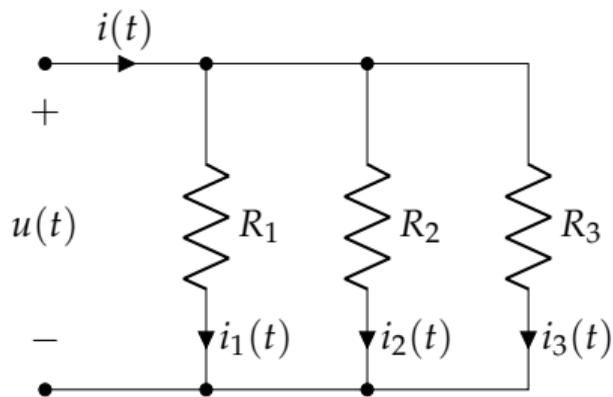
$$u(t) = R_p \cdot i(t)$$

... podemos escribir:

$$G_p = \sum_{i=1}^n G_i$$

$$i(t) = G_p \cdot u(t)$$

## Divisor de corriente



De las ecuaciones anteriores tenemos (usando conductancia):

$$u(t) = \frac{i(t)}{G_1 + G_2 + G_3}$$

$$i_3(t) = G_3 \cdot u(t)$$

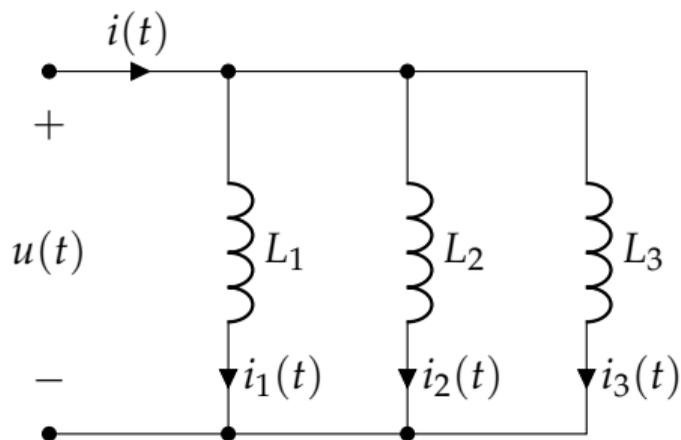
Por tanto, la corriente parcial  $i_3(t)$  se puede expresar en función de la corriente total  $i(t)$ :

$$i_3(t) = i(t) \cdot \frac{G_3}{G_1 + G_2 + G_3}$$

En general:

$$i_o(t) = i(t) \cdot \frac{G_o}{G_p}$$

## Conexión en paralelo de inductancias



$$u(t) = L_1 \cdot \frac{di_1(t)}{dt}$$

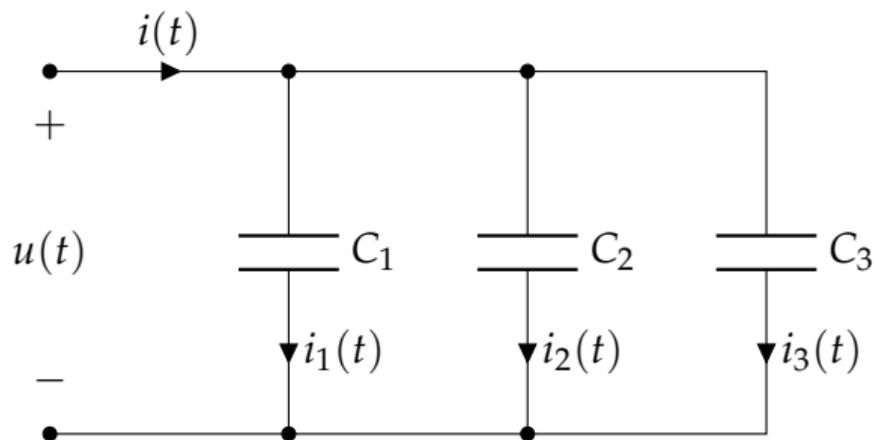
$$u(t) = L_2 \cdot \frac{di_2(t)}{dt}$$

$$u(t) = L_3 \cdot \frac{di_3(t)}{dt}$$

$$\boxed{\frac{1}{L_p} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{L_i}}$$

$$u(t) = L_p \cdot \frac{di(t)}{dt}$$

## Conexión en paralelo de condensadores



$$i_1(t) = C_1 \cdot \frac{du(t)}{dt}$$

$$i_2(t) = C_2 \cdot \frac{du(t)}{dt}$$

$$i_3(t) = C_3 \cdot \frac{du(t)}{dt}$$

$$C_p = \sum_{i=1}^n C_i$$

$$i(t) = C_p \cdot \frac{du(t)}{dt}$$

# Conexión en paralelo de generadores

## Generadores de Tensión

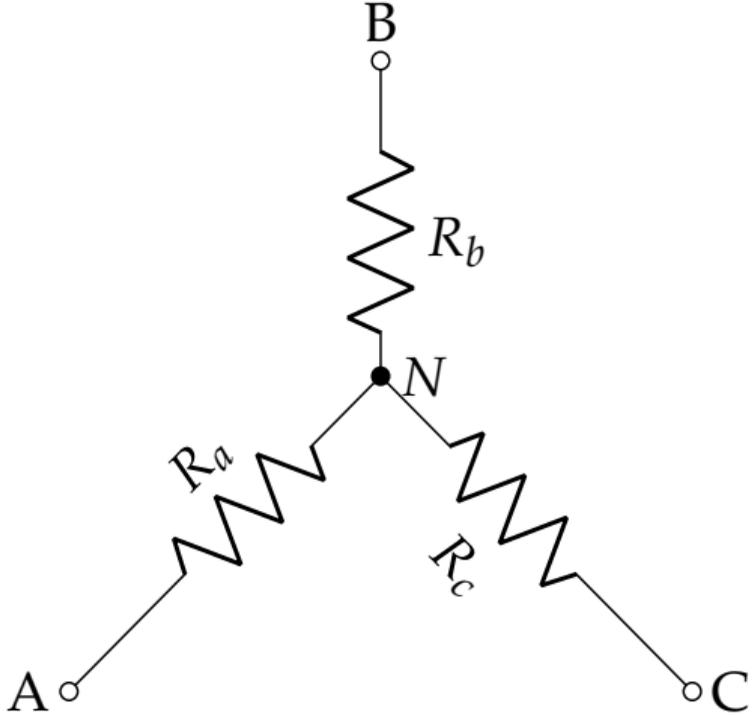
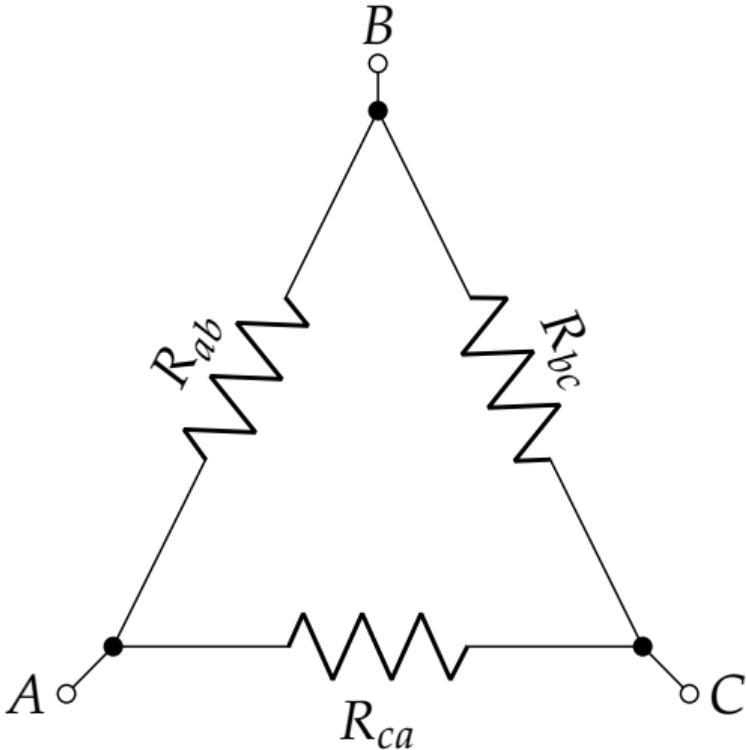
- ▶ Ideal: todas las fuentes deben ser idénticas (valor y polaridad).
- ▶ Real: sin restricción, transformación de fuentes para fuente equivalente.

## Generadores de Corriente

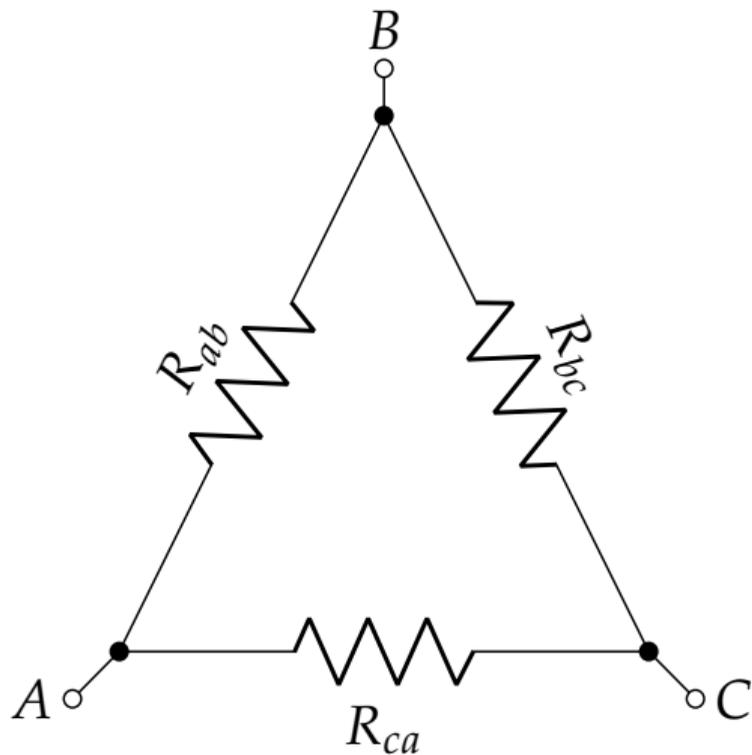
- ▶ Pueden conectarse en paralelo sin restricción.

$$I_{gT} = \sum_{i=1}^N I_{gi}$$
$$G_{gT} = \sum_{i=1}^N G_{gi}$$

# Conexión Estrella - Triángulo



## Conexión Estrella - Triángulo

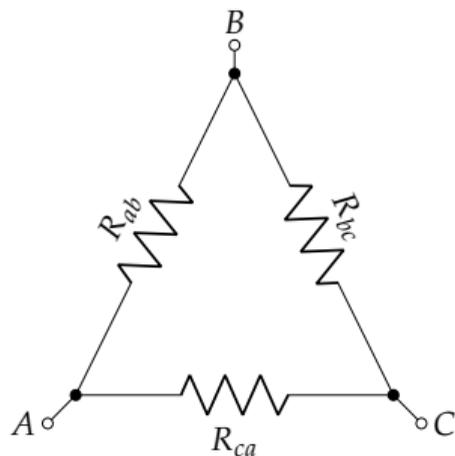


$$R_{AB} = \frac{R_{ab} \cdot (R_{bc} + R_{ca})}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}}$$

$$R_{BC} = \frac{R_{bc} \cdot (R_{ab} + R_{ca})}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}}$$

$$R_{CA} = \frac{R_{ca} \cdot (R_{ab} + R_{bc})}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}}$$

## Conexión Estrella - Triángulo

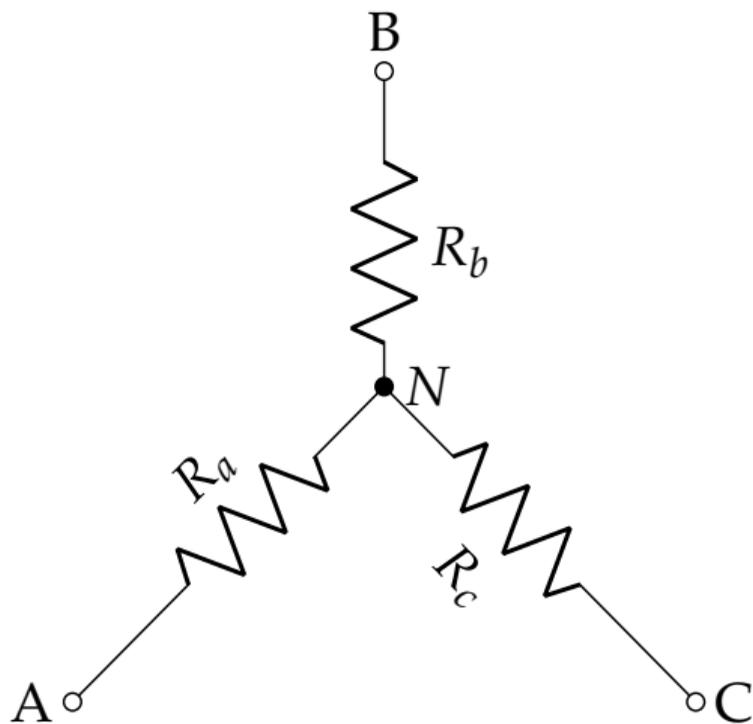


$$R_{AB} = \frac{R_{ab} \cdot R_{bc}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}} + \frac{R_{ab} \cdot R_{ca}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}}$$

$$R_{BC} = \frac{R_{bc} \cdot R_{ab}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}} + \frac{R_{bc} \cdot R_{ca}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}}$$

$$R_{CA} = \frac{R_{ca} \cdot R_{ab}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}} + \frac{R_{ca} \cdot R_{bc}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}}$$

## Conexión Estrella - Triángulo



$$R_{AB} = R_a + R_b$$

$$R_{BC} = R_b + R_c$$

$$R_{CA} = R_c + R_a$$

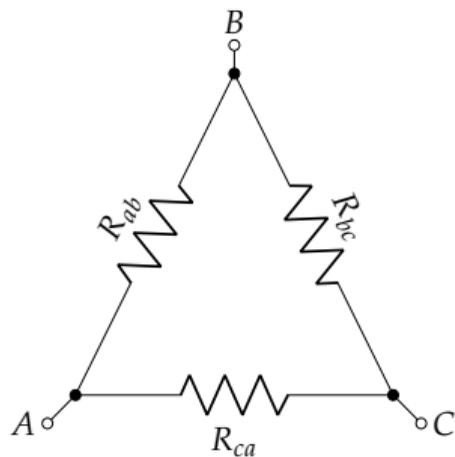
## Conexión Estrella - Triángulo

$$\frac{R_{ab} \cdot R_{bc}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}} + \frac{R_{ab} \cdot R_{ca}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}} = R_a + R_b$$

$$\frac{R_{ab} \cdot R_{bc}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}} + \frac{R_{bc} \cdot R_{ca}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}} = R_b + R_c$$

$$\frac{R_{ab} \cdot R_{ca}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}} + \frac{R_{bc} \cdot R_{ca}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}} = R_c + R_a$$

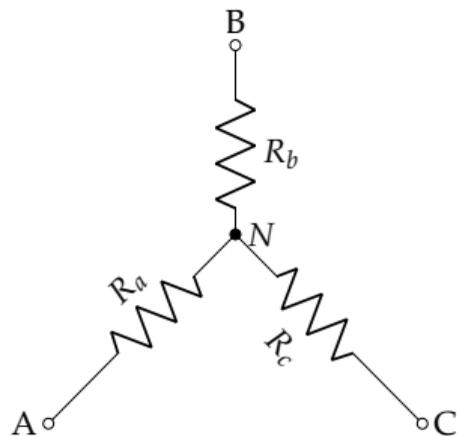
## Conversión de Triángulo a Estrella



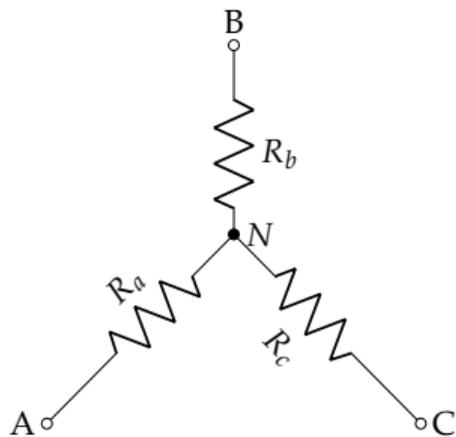
$$R_a = \frac{R_{ab} \cdot R_{ca}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}}$$

$$R_b = \frac{R_{ab} \cdot R_{bc}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}}$$

$$R_c = \frac{R_{bc} \cdot R_{ca}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}}$$



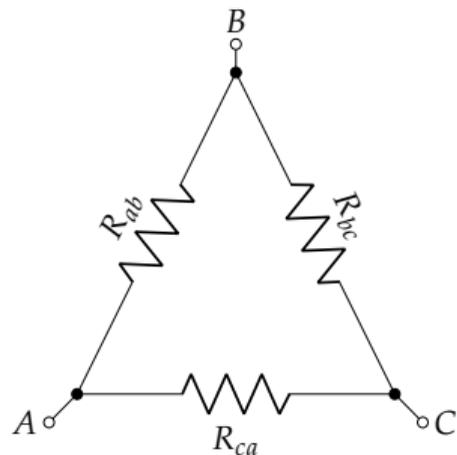
# Conversión de Estrella a Triángulo



$$G_{ab} = \frac{G_a \cdot G_b}{G_a + G_b + G_c}$$

$$G_{bc} = \frac{G_b \cdot G_c}{G_a + G_b + G_c}$$

$$G_{ca} = \frac{G_c \cdot G_a}{G_a + G_b + G_c}$$



① Conceptos Fundamentales

② Elementos circuitales

③ Leyes de Kirchhoff

④ Métodos de Análisis

① Conceptos Fundamentales

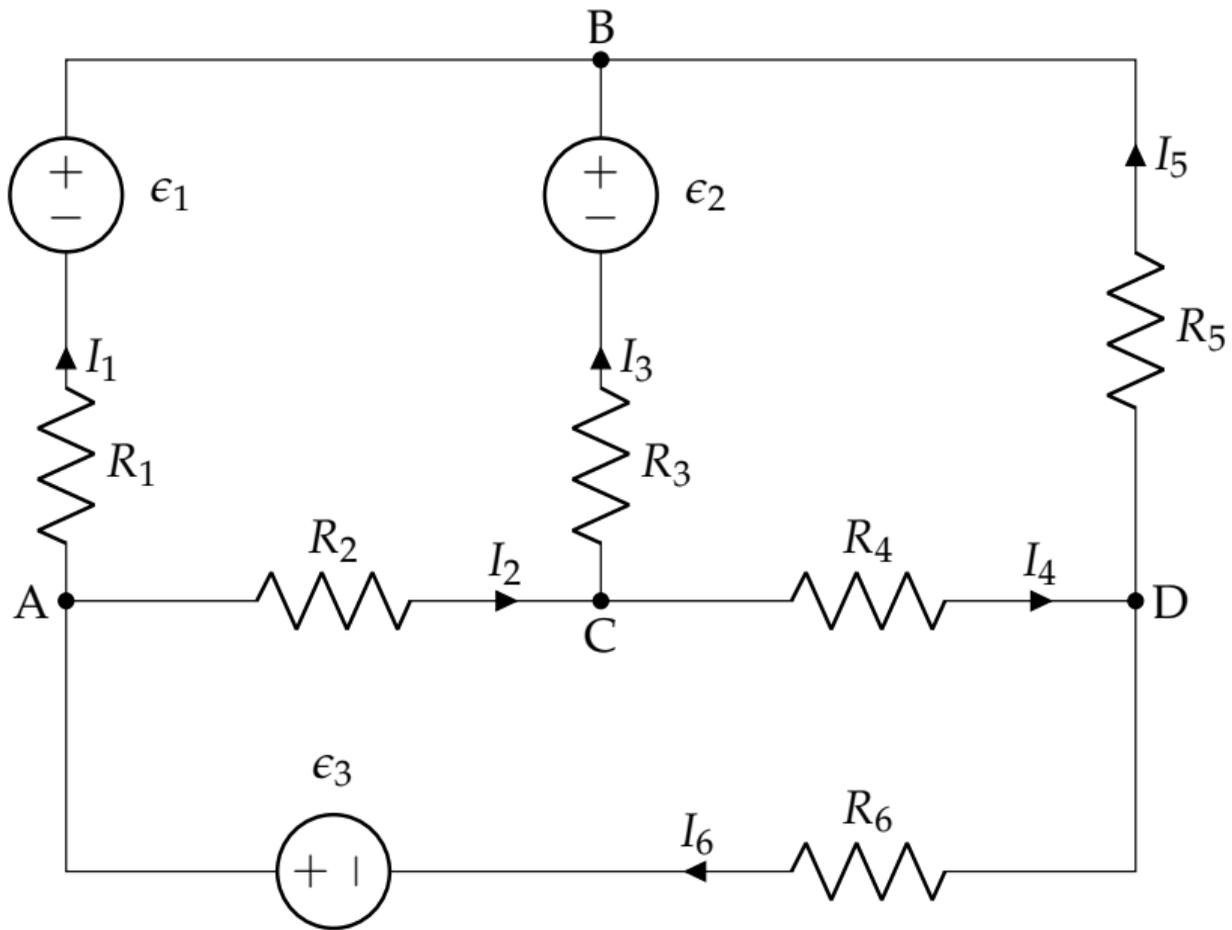
② Elementos circuitales

③ Leyes de Kirchhoff

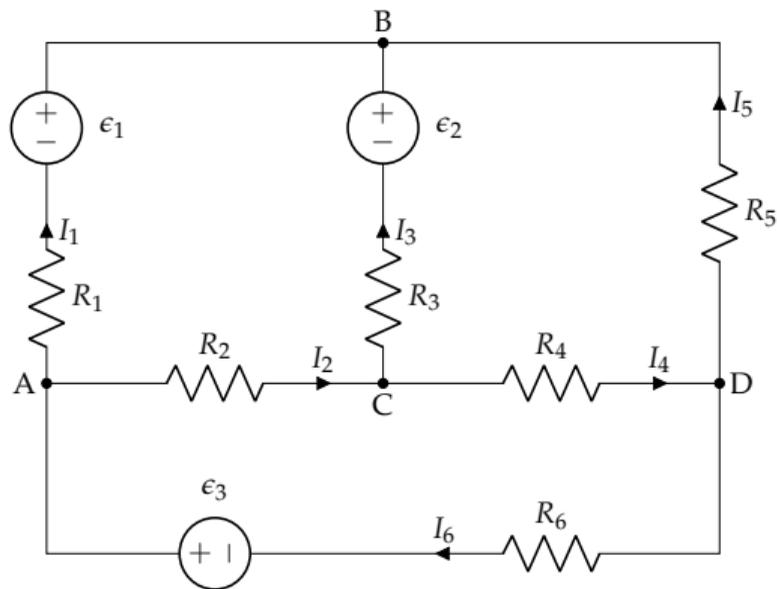
④ Métodos de Análisis

Método de las mallas

Método de los nudos



# Aplicamos LKC



Nudo A:

$$I_6 = I_1 + I_2$$

Nudo B:

$$I_1 + I_3 + I_5 = 0$$

Nudo C:

$$I_2 = I_3 + I_4$$

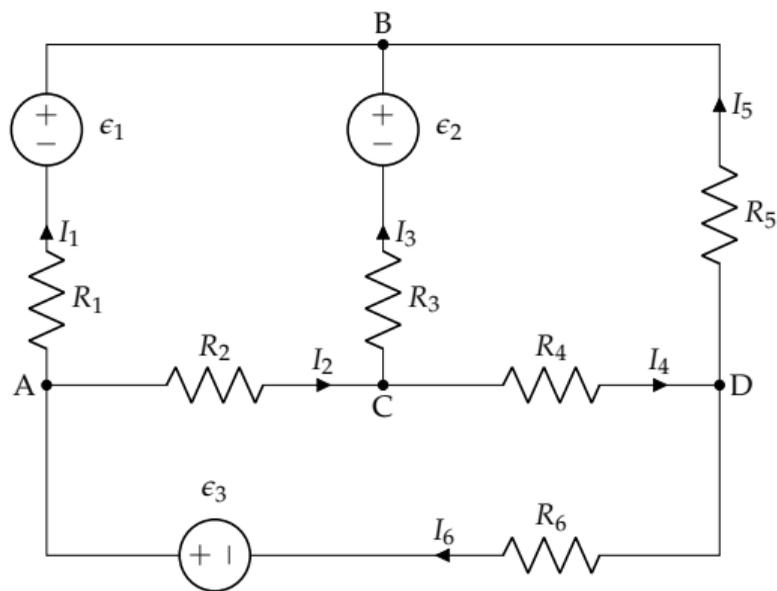
Nudo D:

$$I_4 = I_5 + I_6$$

No son ecuaciones linealmente independientes:

$$C = A + B + D$$

# Aplicamos LKV



Malla ABCA

$$I_1 \cdot R_1 - \epsilon_1 + \epsilon_2 - I_3 \cdot R_3 - I_2 \cdot R_2 = 0$$

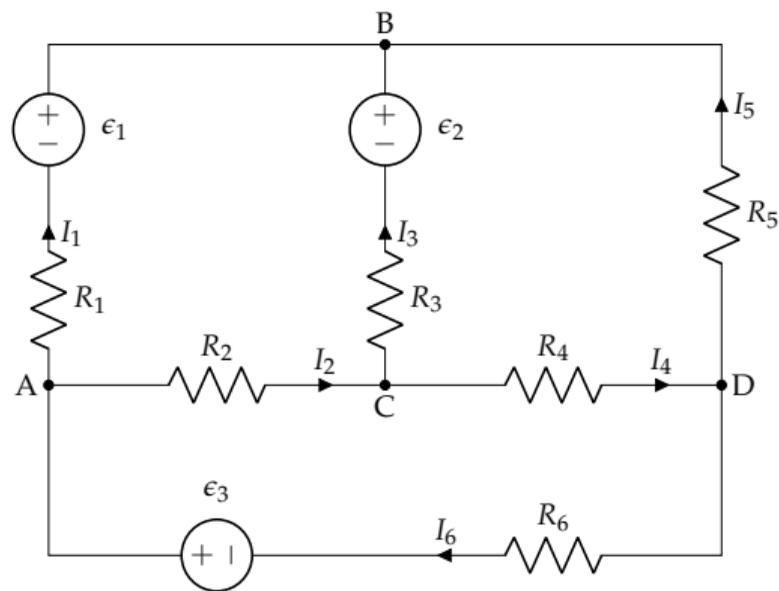
Malla BDCB

$$-I_5 \cdot R_5 - I_4 \cdot R_4 + I_3 \cdot R_3 - \epsilon_2 = 0$$

Malla ACDA

$$I_2 \cdot R_2 + I_4 \cdot R_4 + I_6 \cdot R_6 - \epsilon_3 = 0$$

## Combinamos las ecuaciones



$$-I_1 - I_2 + I_6 = 0$$

$$I_1 + I_3 + I_5 = 0$$

$$I_4 - I_5 - I_6 = 0$$

$$I_1 \cdot R_1 - I_2 \cdot R_2 - I_3 \cdot R_3 = \epsilon_1 - \epsilon_2$$

$$I_3 \cdot R_3 - I_4 \cdot R_4 - I_5 \cdot R_5 = \epsilon_2$$

$$I_2 \cdot R_2 + I_4 \cdot R_4 + I_6 \cdot R_6 = \epsilon_3$$

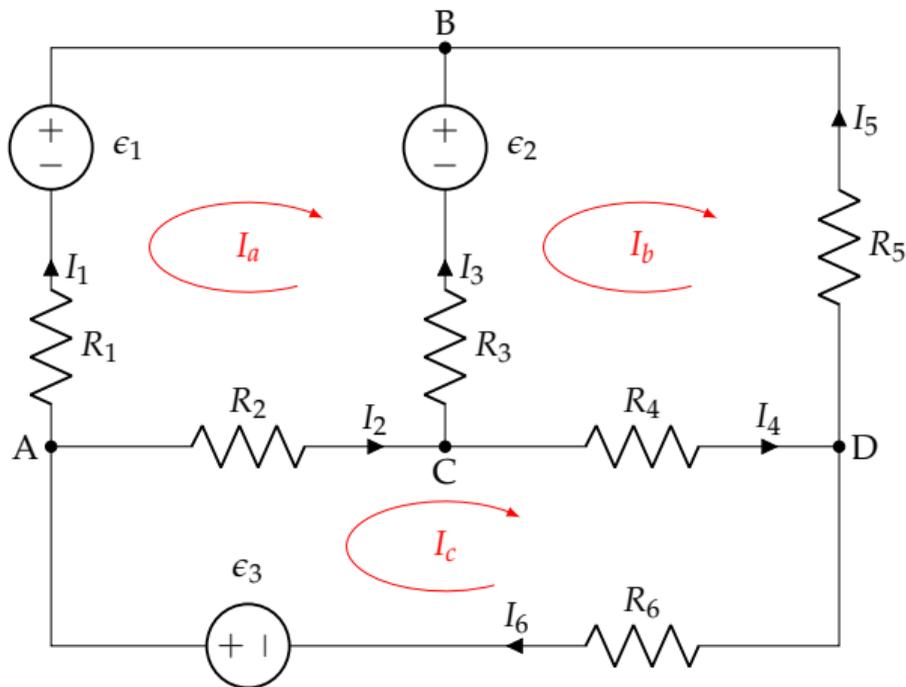
## Y las expresamos en forma matricial

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ R_1 & -R_2 & -R_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 & -R_4 & -R_5 & 0 \\ 0 & R_2 & 0 & R_4 & 0 & R_6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \epsilon_1 - \epsilon_2 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \end{bmatrix}$$

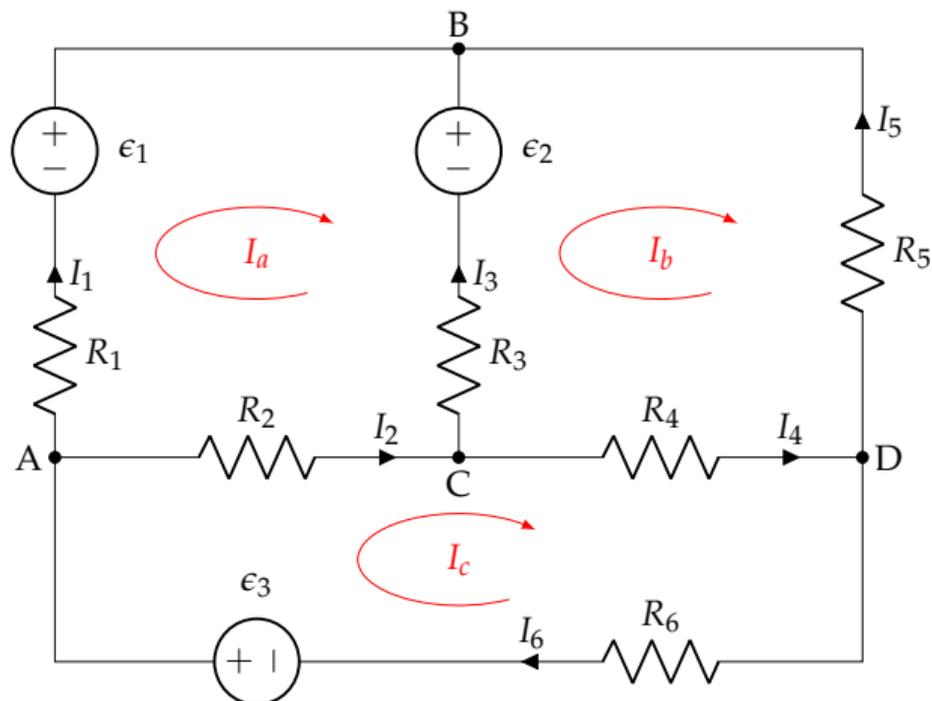
Resolver el circuito implica resolver un sistema lineal de 6 ecuaciones, en el que las incógnitas son las corrientes de cada rama.

## Método de las mallas

El método de las mallas simplifica el sistema de ecuaciones necesario mediante unas corrientes *virtuales* denominadas **corrientes de malla**, aprovechando las relaciones entre corrientes de la LKC.



## Relaciones entre las corrientes de rama y malla



Ramas externas:

$$I_1 = I_a$$

$$I_5 = -I_b$$

$$I_6 = I_c$$

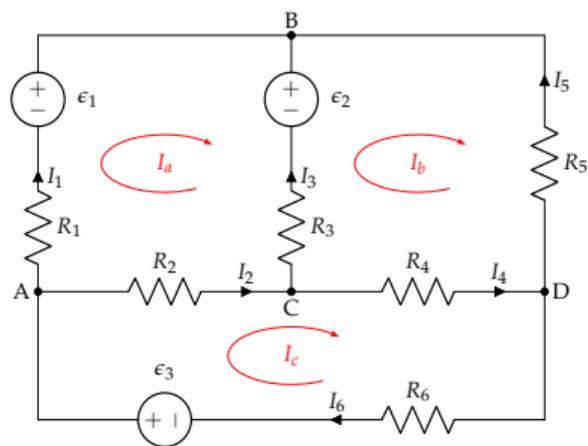
Ramas internas:

$$I_2 = I_c - I_a$$

$$I_3 = I_b - I_a$$

$$I_4 = I_c - I_b$$

# Ecuaciones de malla



Malla ABCA

$$I_a \cdot R_1 - \epsilon_1 + \epsilon_2 + (I_a - I_b) \cdot R_3 + (I_a - I_c) \cdot R_2 = 0$$

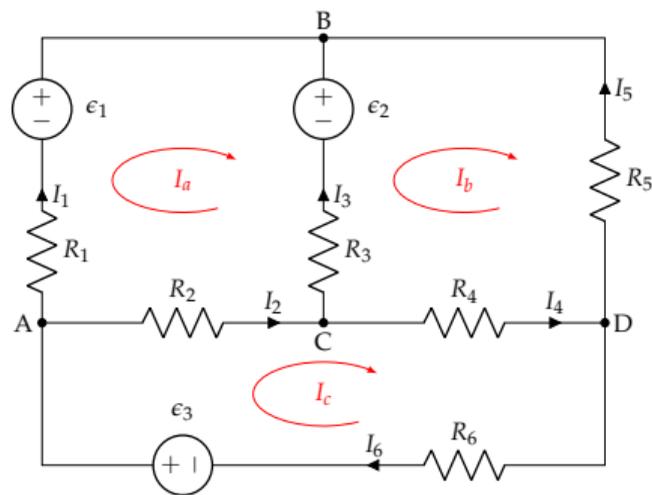
Malla BDCB

$$I_b \cdot R_5 + (I_b - I_c) \cdot R_4 + (I_b - I_a) \cdot R_3 - \epsilon_2 = 0$$

Malla ACDA

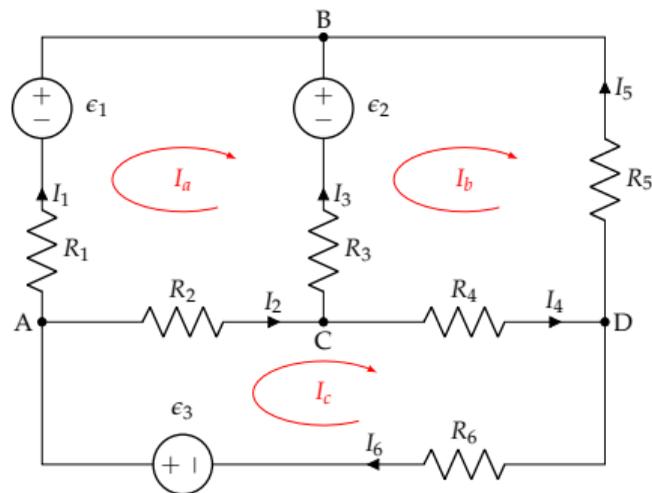
$$(I_c - I_a) \cdot R_2 + (I_c - I_b) \cdot R_4 + I_c \cdot R_6 - \epsilon_3 = 0$$

## Reagrupamos corrientes en las ecuaciones



$$\begin{aligned} I_a \cdot (R_1 + R_3 + R_2) - I_b \cdot R_3 - I_c \cdot R_2 &= \epsilon_1 - \epsilon_2 \\ -I_a \cdot R_3 + I_b \cdot (R_5 + R_4 + R_3) - I_c \cdot R_4 &= \epsilon_2 \\ -I_a \cdot R_2 - I_b \cdot R_4 + I_c \cdot (R_2 + R_4 + R_6) &= \epsilon_3 \end{aligned}$$

## Y lo expresamos en forma matricial



$$\begin{bmatrix} (R_1 + R_3 + R_2) & -R_3 & -R_2 \\ -R_3 & (R_5 + R_4 + R_3) & -R_4 \\ -R_2 & -R_4 & (R_2 + R_4 + R_6) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_1 - \epsilon_2 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \end{bmatrix}$$

## Ecuación General

$$\begin{bmatrix} \sum R_{aa} & -\sum R_{ab} & -\sum R_{ca} \\ -\sum R_{ab} & \sum R_{bb} & -\sum R_{bc} \\ -\sum R_{ca} & -\sum R_{bc} & \sum R_{cc} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum \epsilon_a \\ \sum \epsilon_b \\ \sum \epsilon_c \end{bmatrix}$$

$\sum R_{aa}$  suma de las resistencias incluidas en la malla de  $I_a$ .

$\sum R_{ab}$  suma de las resistencias incluidas en las ramas compartidas por las mallas de  $I_a$  e  $I_b$ .

$\sum \epsilon_a$  suma algebraica de las fuerzas electromotrices de los generadores de la malla de  $I_a$ . Su signo es positivo si contribuyen al giro de la corriente.

# Procedimiento

- 1 Identificar las corrientes de rama.
- 2 Asignar un sentido a las corrientes de malla.
- 3 Relacionar corrientes de rama con corrientes de malla.
- 4 Escribir ecuación de mallas.
- 5 Resolver la ecuación, obteniendo las corrientes de malla.
- 6 Obtener las corrientes de rama con las relaciones del punto 3.

**Importante:** todos los generadores deben ser fuentes de tensión.

① Conceptos Fundamentales

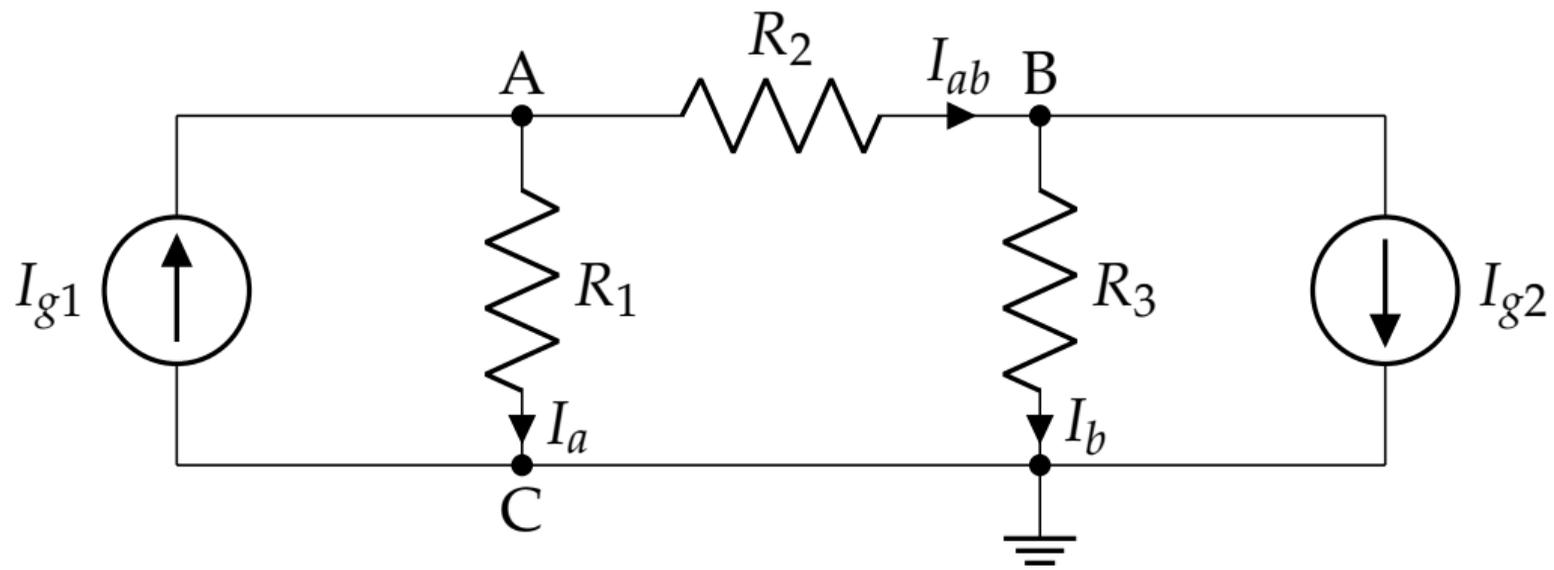
② Elementos circuitales

③ Leyes de Kirchhoff

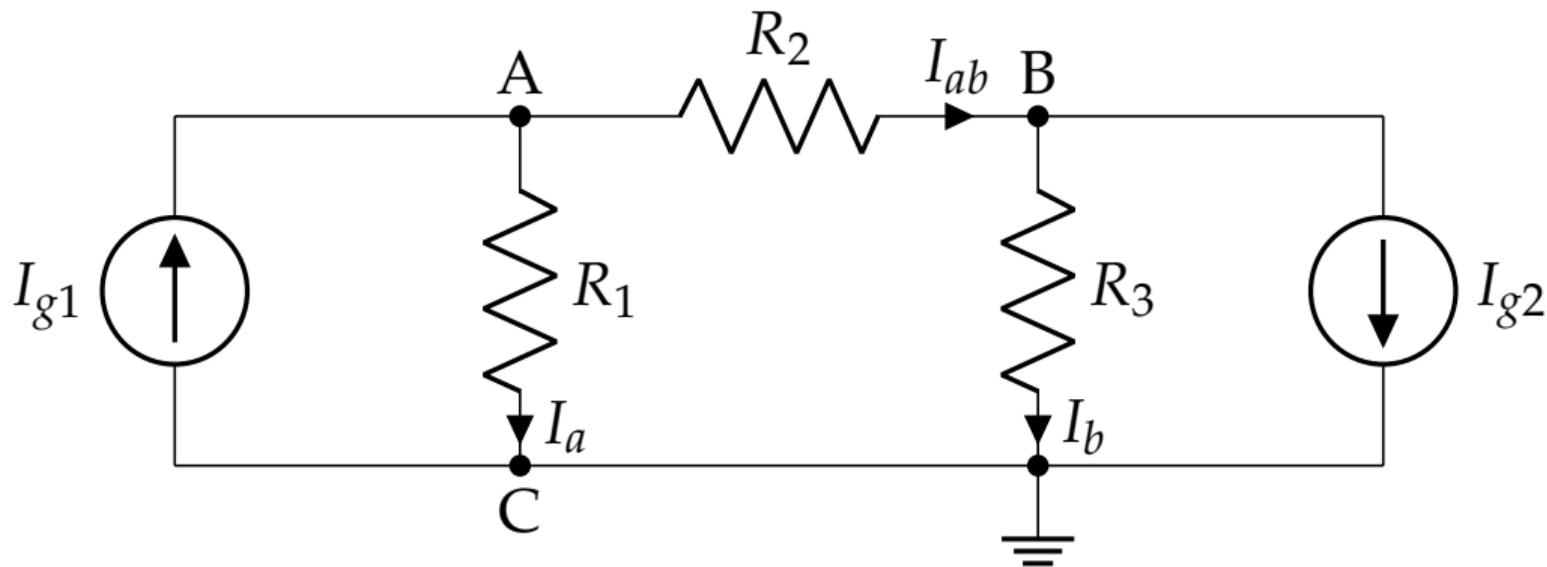
④ Métodos de Análisis

Método de las mallas

Método de los nudos



## Aplicamos LKC



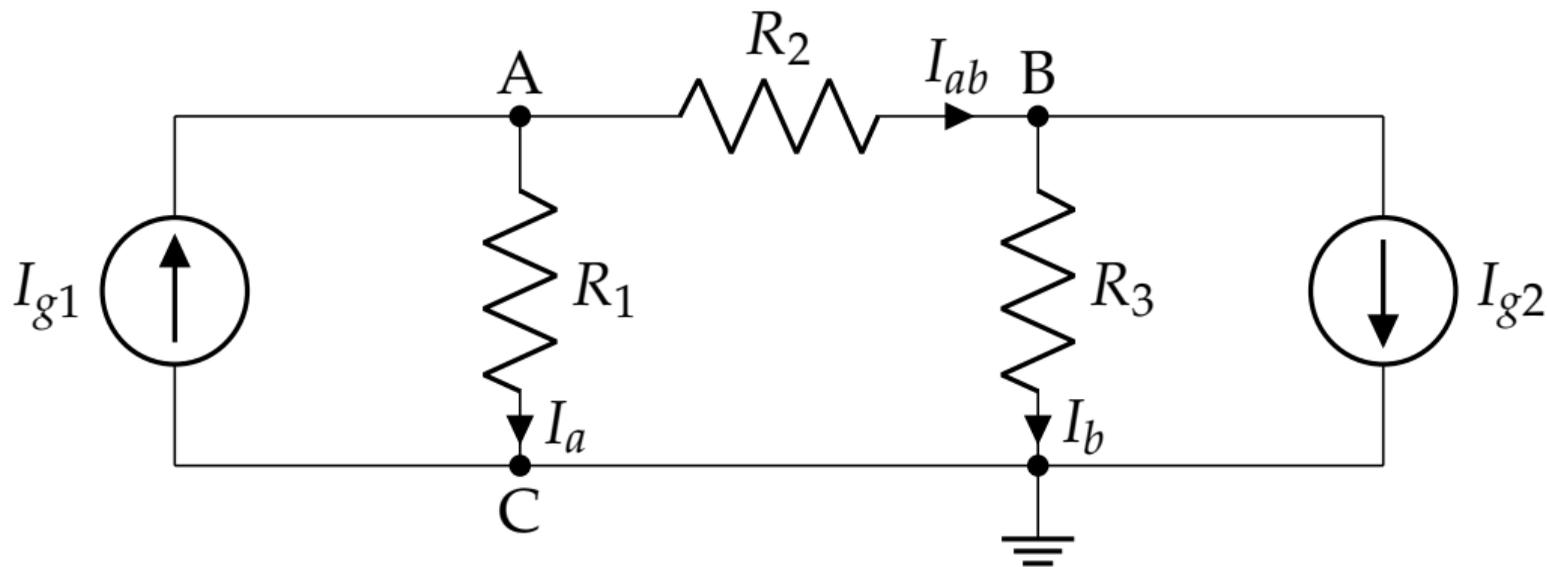
Nudo A

$$I_{g1} - I_a - I_{ab} = 0$$

Nudo B

$$I_{ab} - I_{g2} - I_b = 0$$

## Tensiones en las resistencias

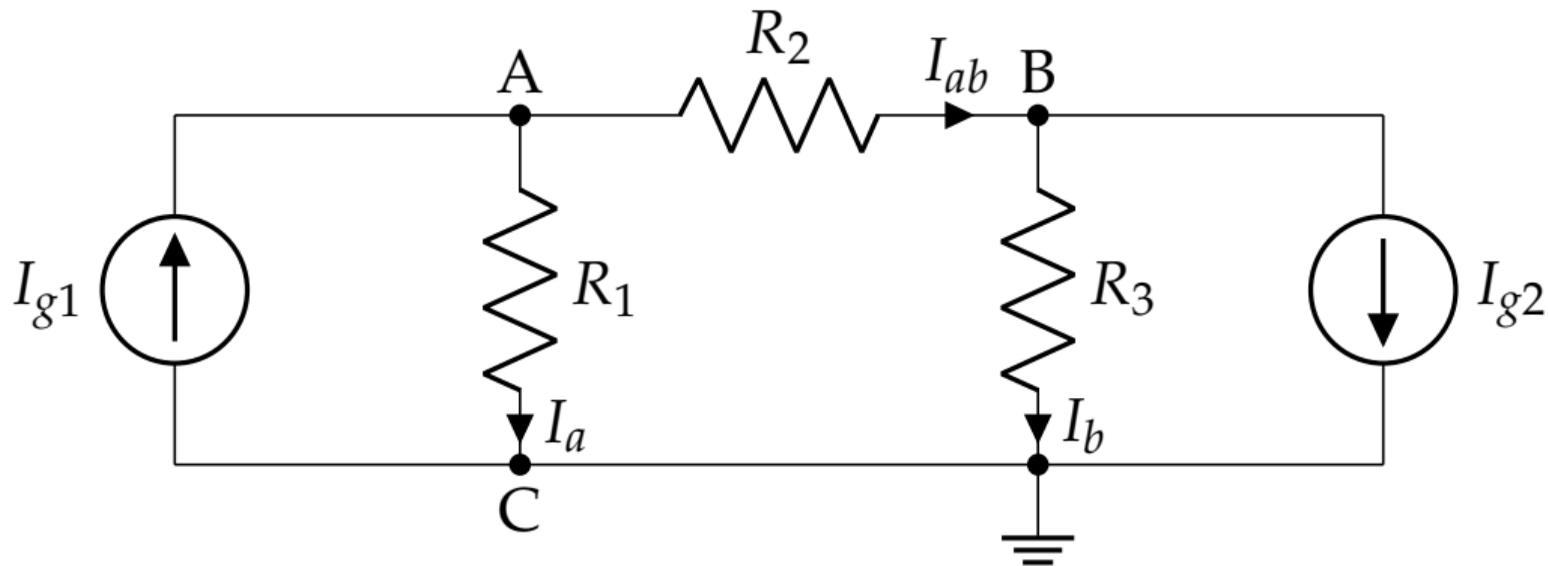


$$V_A = I_a \cdot R_1$$

$$V_B = I_b \cdot R_3$$

$$V_{AB} = I_{ab} \cdot R_2$$

## Despejamos las corrientes

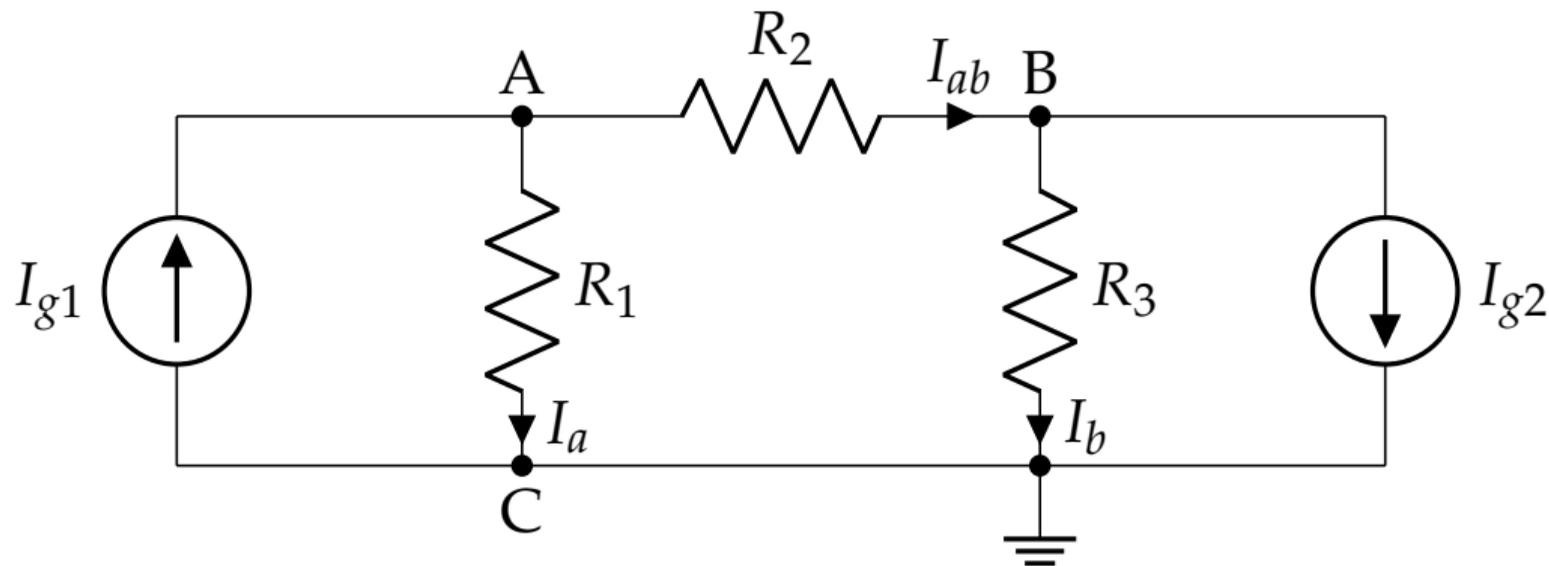


$$I_a = V_A \cdot G_1$$

$$I_b = V_B \cdot G_3$$

$$I_{ab} = (V_A - V_B) \cdot G_2$$

## Combinamos las ecuaciones



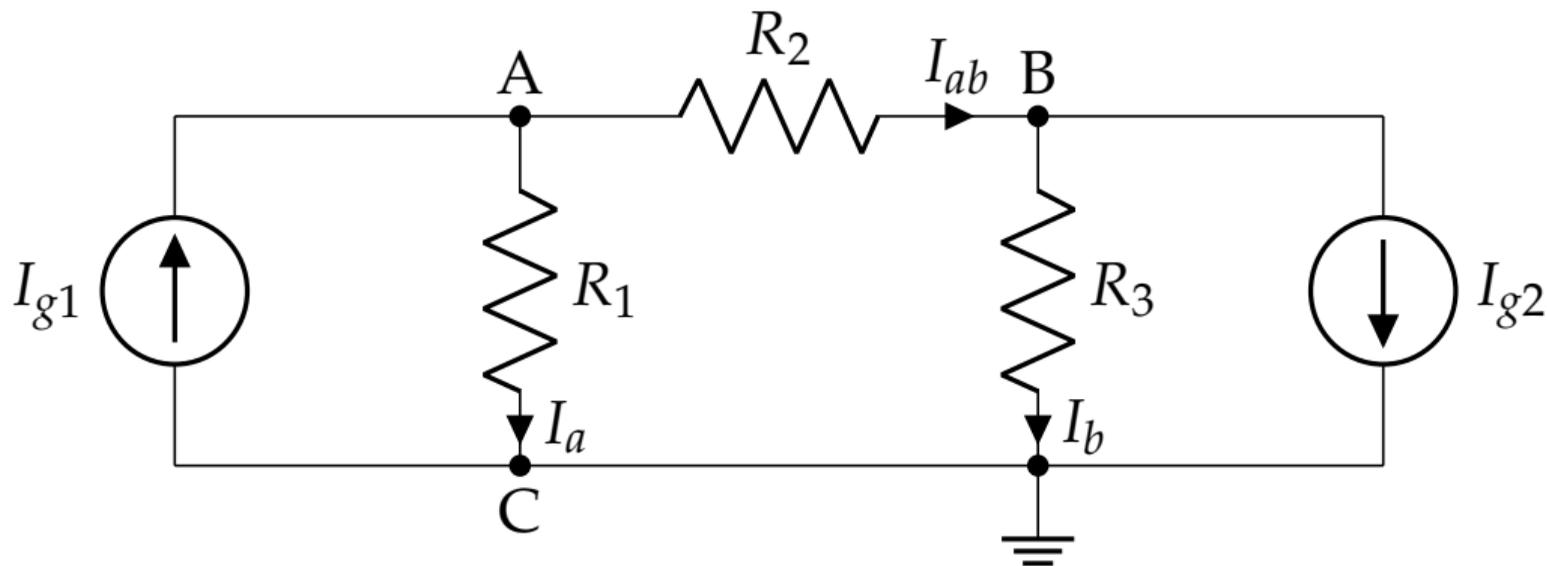
Nudo A

$$I_{g1} - V_A \cdot G_1 - (V_A - V_B) \cdot G_2 = 0$$

Nudo B

$$(V_A - V_B) \cdot G_2 - I_{g2} - V_B \cdot G_3 = 0$$

## Reorganizamos las ecuaciones



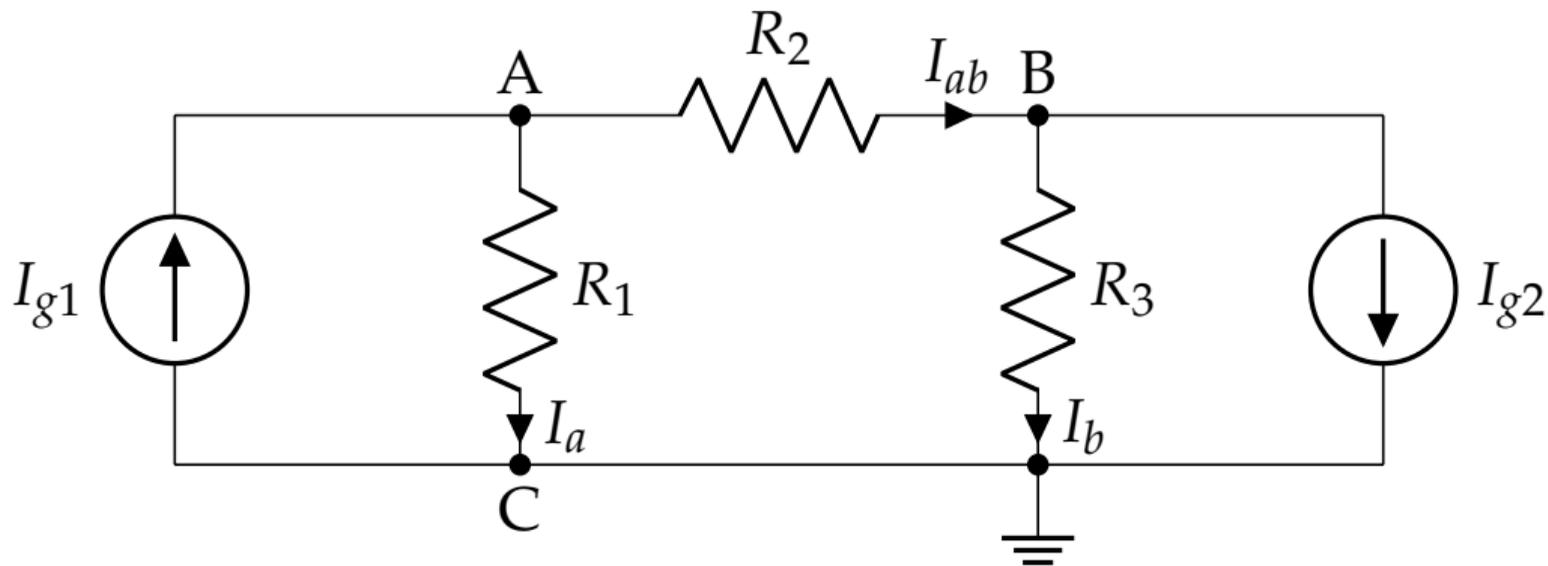
Nudo A

$$I_{g1} = V_A \cdot (G_1 + G_2) - V_B \cdot G_2$$

Nudo B

$$-I_{g2} = -V_A \cdot G_2 + V_B \cdot (G_2 + G_3)$$

## Expresión matricial



$$\begin{bmatrix} G_1 + G_2 & -G_2 \\ -G_2 & G_2 + G_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_A \\ V_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{g1} \\ -I_{g2} \end{bmatrix}$$

## Ecuación general

$$\begin{bmatrix} \sum G_A & -\sum G_{AB} & -\sum G_{AC} \\ -\sum G_{AB} & \sum G_B & -\sum G_{BC} \\ -\sum G_{AC} & -\sum G_{BC} & \sum G_C \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_A \\ V_B \\ V_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum I_{gA} \\ \sum I_{gB} \\ \sum I_{gC} \end{bmatrix}$$

$\sum G_A$  Suma de las conductancias conectadas al nudo A.

$\sum G_{AB}$  Suma de las conductancias conectadas entre los nudos A y B.

$\sum I_{gA}$  Suma algebraica de las corrientes de los generadores conectados en el nudo A. El signo es positivo si el generador inyecta corriente en el nudo.

**Importante:** todos los generadores deben ser fuentes de corriente.