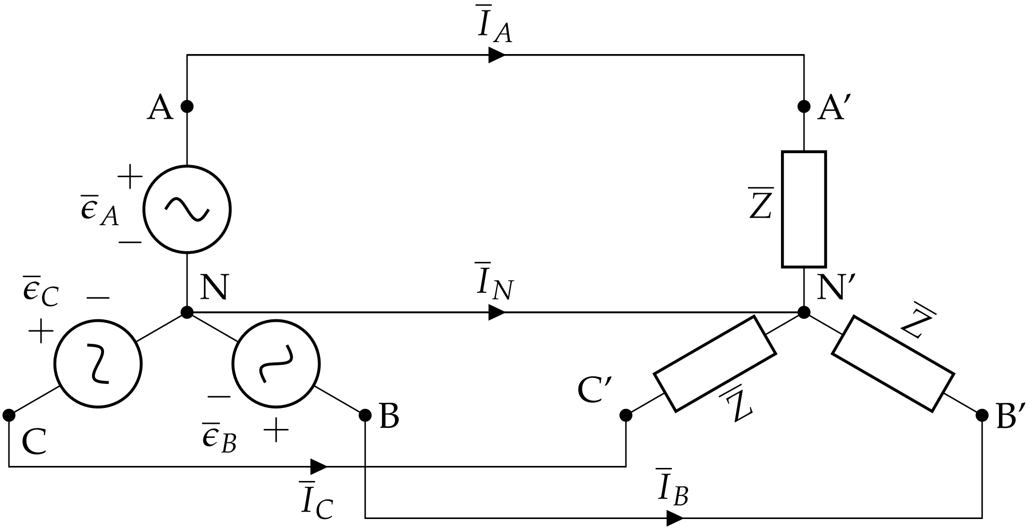
Sistemas trifásicos

Teoría de Circuitos

Autor: Luis Badesa Bernardo



$\overline{I}_A$
A
A′
$\overline{\epsilon}_A$
+
−
$\overline{Z}$
N
$\overline{I}_N$
N′
$\overline{\epsilon}_C$
−
+
$\overline{Z}$
C′
$\overline{Z}$
B′
−
B
C
$\overline{\epsilon}_B$
+
$\overline{I}_C$
$\overline{I}_B$

Motivación de los sistemas trifásicos

- En un sistema trifásico la **potencia instantánea es constante**, evitando vibraciones y esfuerzos en las máquinas
  - **Recordatorio**: en un sistema monofásico, la potencia instantánea es pulsante
- La **masa de conductor necesaria** en un sistema trifásico **es un 25 % inferior** que en un sistema monofásico para transportar la misma potencia

---

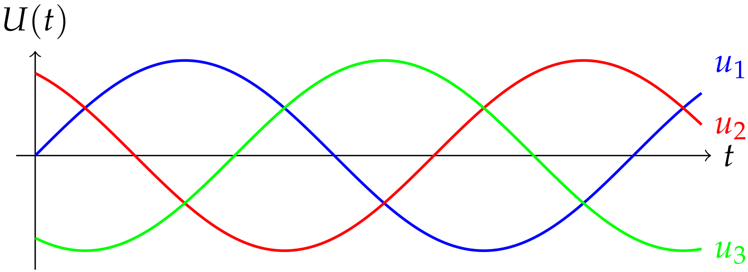
Por estas razones, se usan sistemas trifásicos en **generación, transporte y distribución de energía eléctrica**

(los sistemas monofásicos se utilizan en cargas domésticas y de baja potencia)

Ondas trifásicas

Para conseguir potencia constante, las ondas trifásicas deben cumplir:

- Mismo **desfase entre ellas** $\rightarrow$ el desfase debe ser de **120°**
- Igual **amplitud**



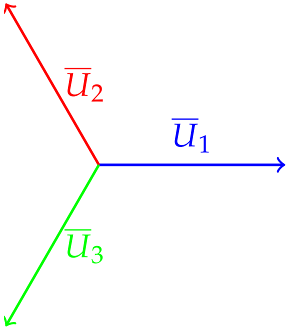
$$u_1(t) = U_0 \sin(\omega t)$$

$$u_2(t) = U_0 \sin(\omega t + 2\pi/3)$$

$$u_3(t) = U_0 \sin(\omega t - 2\pi/3)$$

Fasores de un sistema trifásico

Usamos las mismas herramientas matemáticas que en el Tema 2 $\rightarrow$ **cálculo fasorial**

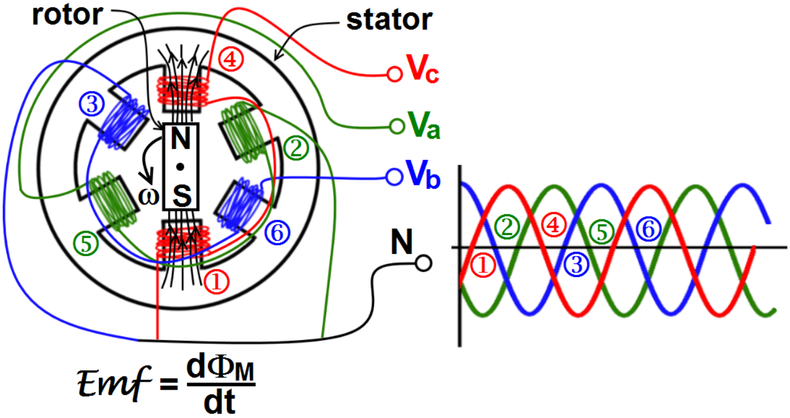


$$\overline{U}_1 = U\underline{/0}$$

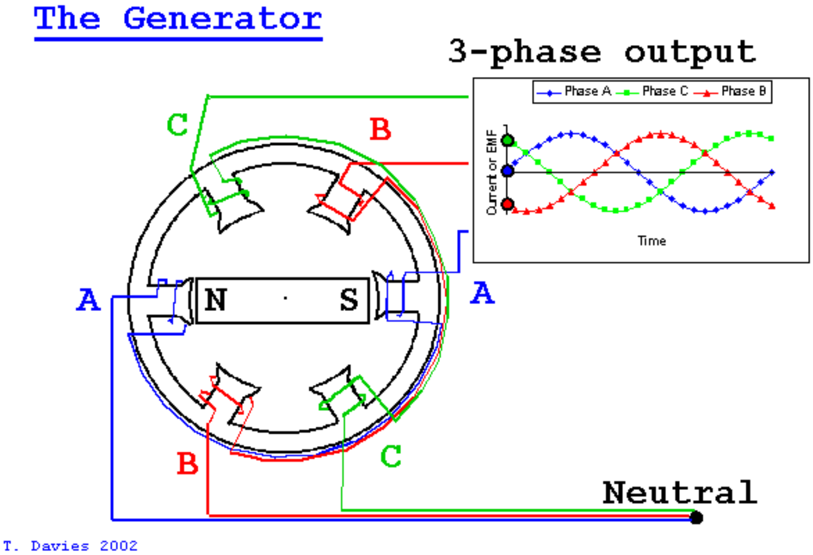
$$\overline{U}_2 = U\underline{/2\pi/3}$$

$$\overline{U}_3 = U\underline{/-2\pi/3}$$

Generador trifásico



(clica en la imagen)



¿Por qué 3 fases?

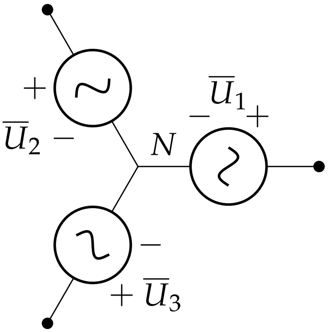
¿Por qué no 2, 5 o 17?

- 2 fases
  - Requiere **mayor masa de conductor** que un sistema trifásico
- Más de 3 fases
  - El rendimiento de un motor o generador aumenta ligeramente con el nº de fases

    Pero la leve mejoría para más de 3 fases **no justifica la mayor complejidad** del sistema (por ejemplo, las protecciones eléctricas serían bastante más complejas)

Conexión

- Punto común de la conexión estrella $\rightarrow$ **neutro**, N
- Potencial de N se toma como **referencia**



$$u_1(t) = U_0 \sin(\omega t)$$

$$u_2(t) = U_0 \sin(\omega t + 2\pi/3)$$

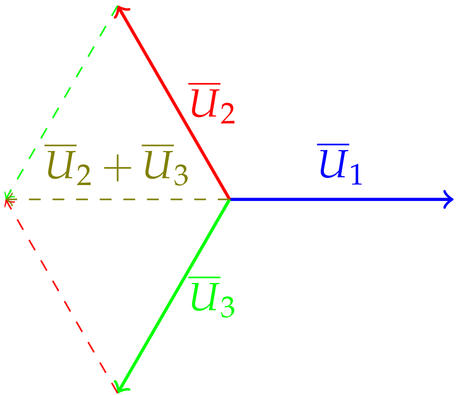
$$u_3(t) = U_0 \sin(\omega t - 2\pi/3)$$

$$\overline{U}_1 = U\underline{/0}$$

$$\overline{U}_2 = U\underline{/2\pi/3}$$

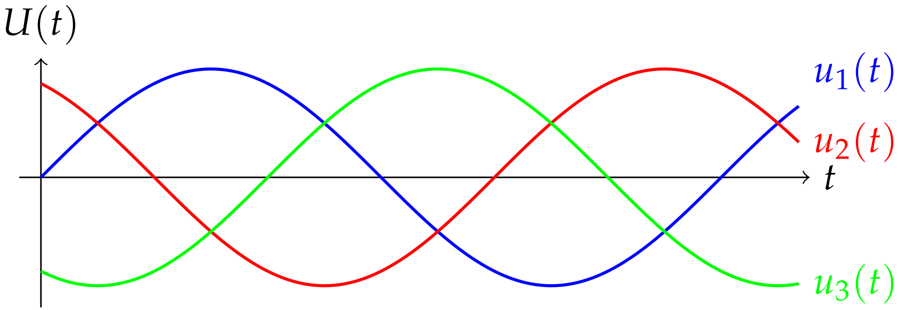
$$\overline{U}_3 = U\underline{/-2\pi/3}$$

Las tensiones suman 0



$$\boxed{\overline{U}_1 + \overline{U}_2 + \overline{U}_3 = 0}$$

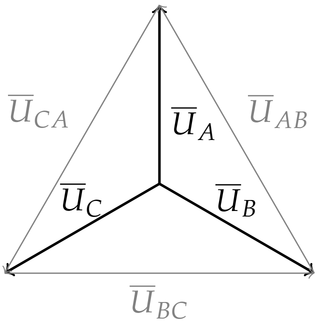
Las tensiones suman 0



$$\boxed{u_1(t) + u_2(t) + u_3(t) = 0}$$

(esto no quiere decir que una carga vaya a estar sometida constantemente a 0 V, porque **ninguna carga** va a estar **sometida a las 3 tensiones** de fase a la vez)

Tensiones de fase y de línea



- Tensiones de **fase**: $U_A, U_B, U_C \equiv U_f$
  (o tensiones **simples**, entre fase y neutro)

- Tensiones de **línea**: $U_{AB}, U_{BC}, U_{CA} \equiv U_L$
  (o tensiones **compuestas**, entre dos conductores de línea)

$$\overline{U}_{AB} = \overline{U}_A - \overline{U}_B$$
$$\overline{U}_{BC} = \overline{U}_B - \overline{U}_C$$
$$\overline{U}_{CA} = \overline{U}_C - \overline{U}_A$$

$$\overline{U}_{AB} + \overline{U}_{BC} + \overline{U}_{CA} = 0$$

Relación entre tensiones de fase y de línea

$$\overline{U}_A = U_f \angle \theta_f$$
$$\overline{U}_B = U_f \angle \theta_f - 120^\circ$$

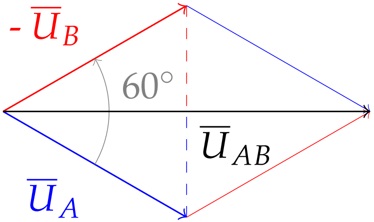
$$\overline{U}_{AB} = \overline{U}_A - \overline{U}_B =$$

$$= U_f \angle \theta_f - U_f \angle \theta_f - 120^\circ \overset{-\overline{A} = A \angle \theta + 180^\circ}{=}$$

$$= U_f \angle \theta_f + U_f \angle \theta_f + 60^\circ \overset{\text{ver gráfico}}{=}$$

$$= 2 \cdot U_f \cdot \cos(30^\circ) \angle \theta_f + 30^\circ \overset{\cos(30^\circ) = \sqrt{3}/2}{=}$$

$$= \sqrt{3}\, U_f \angle \theta_f + 30^\circ$$

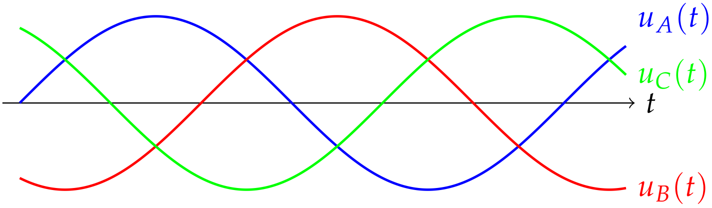


$$\boxed{\begin{aligned} U_L &= \sqrt{3} \cdot U_f \\ \theta_L &= \theta_f + 30^\circ \end{aligned}}$$

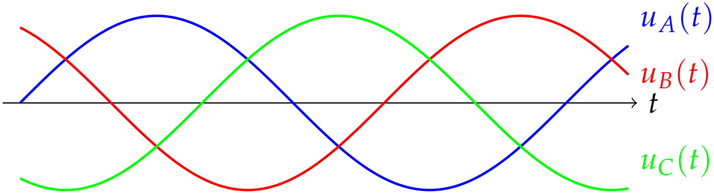
Secuencia de fases

Orden en que ocurren los máximos de cada fase

- Secuencia de Fases Directa (**SFD**): ABC

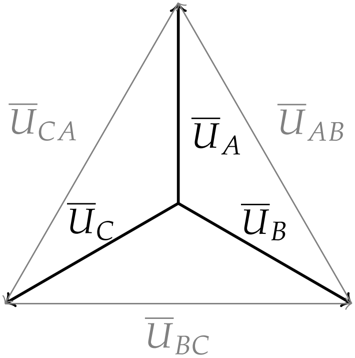


- Secuencia de Fases Inversa (**SFI**): ACB



Secuencia de Fases Directa (SFD)

Por **convenio**, se usa siempre esta **referencia** de fases (memorizad este triángulo):



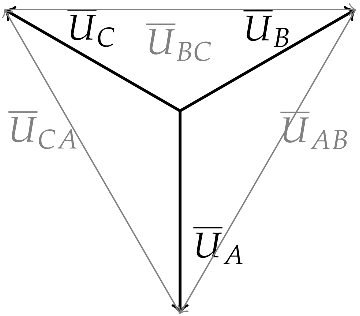
$$\overline{U}_A = U_f \,\underline{/90^\circ} \qquad \overline{U}_{AB} = U_L \,\underline{/120^\circ}$$

$$\overline{U}_B = U_f \,\underline{/-30^\circ} \qquad \overline{U}_{BC} = U_L \,\underline{/0^\circ}$$

$$\overline{U}_C = U_f \,\underline{/-150^\circ} \qquad \overline{U}_{CA} = U_L \,\underline{/-120^\circ}$$

Secuencia de Fases Inversa (SFI)

Por **convenio**, se usa siempre esta **referencia** de fases (memorizad este triángulo):



$$\overline{U}_A = U_f \angle{-90^\circ}$$

$$\overline{U}_B = U_f \angle{30^\circ}$$

$$\overline{U}_C = U_f \angle{150^\circ}$$

$$\overline{U}_{AB} = U_L \angle{-120^\circ}$$

$$\overline{U}_{BC} = U_L \angle{0^\circ}$$

$$\overline{U}_{CA} = U_L \angle{120^\circ}$$

Tipos de receptor

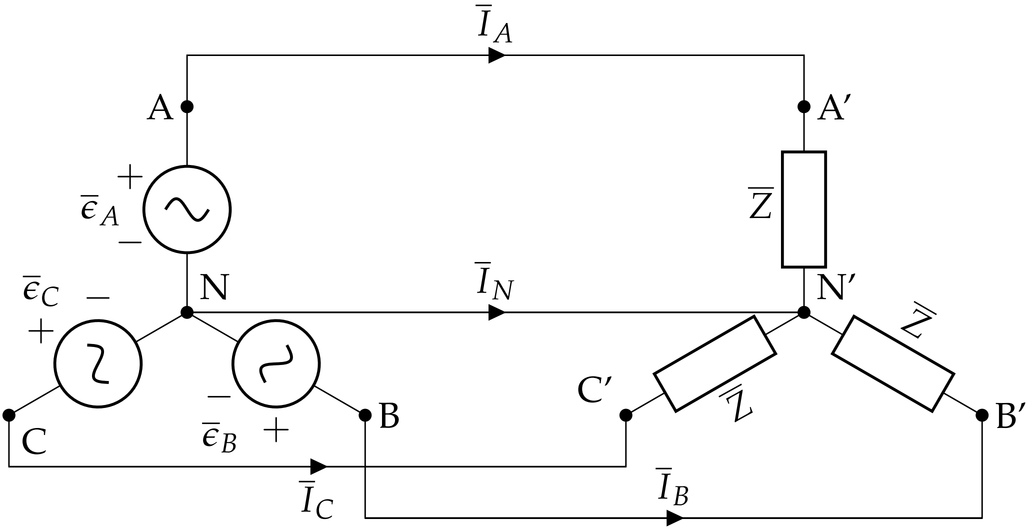
Según su **conexión**:

- **Estrella** (punto común)
- **Triángulo**

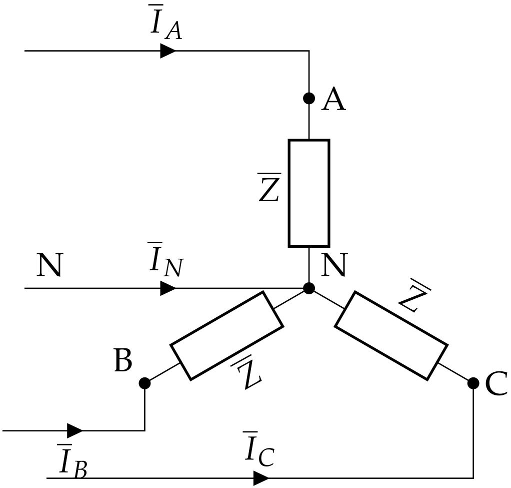
Según sus **impedancias**:

- **Equilibrado** (las tres impedancias son idénticas en módulo y fase)
- **Desequilibrado**

Receptor en estrella equilibrado, con neutro



Receptor en estrella equilibrado, con neutro



$$\bar{I}_A = \frac{\overline{U}_A}{\overline{Z}} = \frac{U_f}{Z}\underline{/\pm 90^\circ - \theta}$$

$$\bar{I}_B = \frac{\overline{U}_B}{\overline{Z}} = \frac{U_f}{Z}\underline{/\mp 30^\circ - \theta}$$

$$\bar{I}_C = \frac{\overline{U}_C}{\overline{Z}} = \frac{U_f}{Z}\underline{/\mp 150^\circ - \theta}$$

(signo de arriba para **SFD**, signo de abajo para **SFI**)

$$\boxed{I_A = I_B = I_C = \frac{U_f}{Z}}$$

(en ⅄, corriente de línea igual a la de fase)

Aplicando **1LK** en el punto común del receptor:

$$\bar{I}_A + \bar{I}_B + \bar{I}_C + \bar{I}_N = 0$$

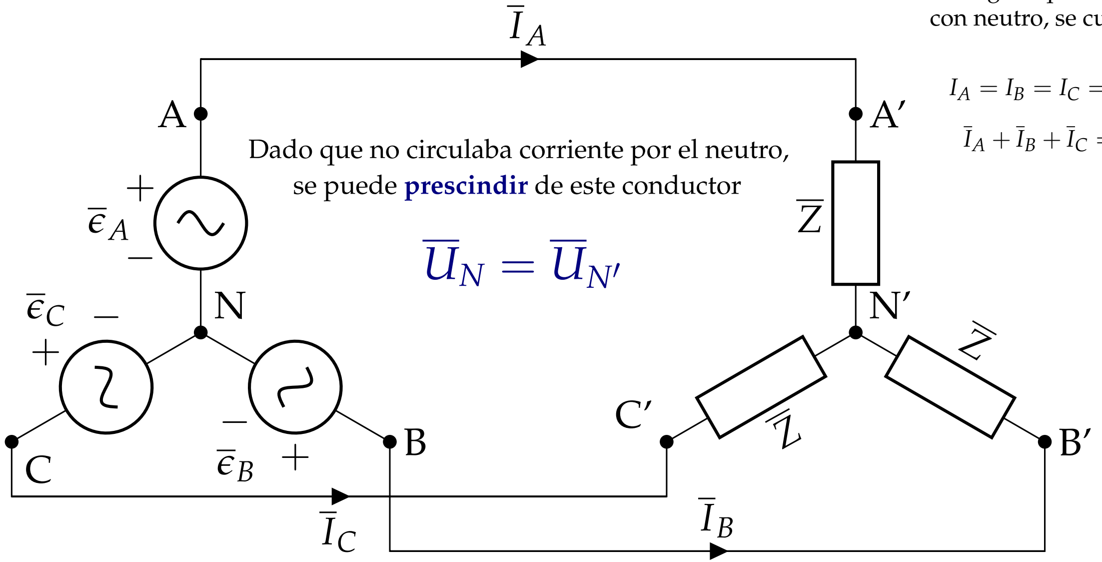
$$\bar{I}_A + \bar{I}_B + \bar{I}_C = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{\bar{I}_N = 0}$$

Receptor en estrella equilibrado, sin neutro

Al igual que en $Z_{\curlywedge}$ con neutro, se cumple:

$$I_A = I_B = I_C = \frac{U_f}{Z}$$

$$\bar{I}_A + \bar{I}_B + \bar{I}_C = 0$$



Dado que no circulaba corriente por el neutro, se puede **prescindir** de este conductor

$$\overline{U}_N = \overline{U}_{N'}$$

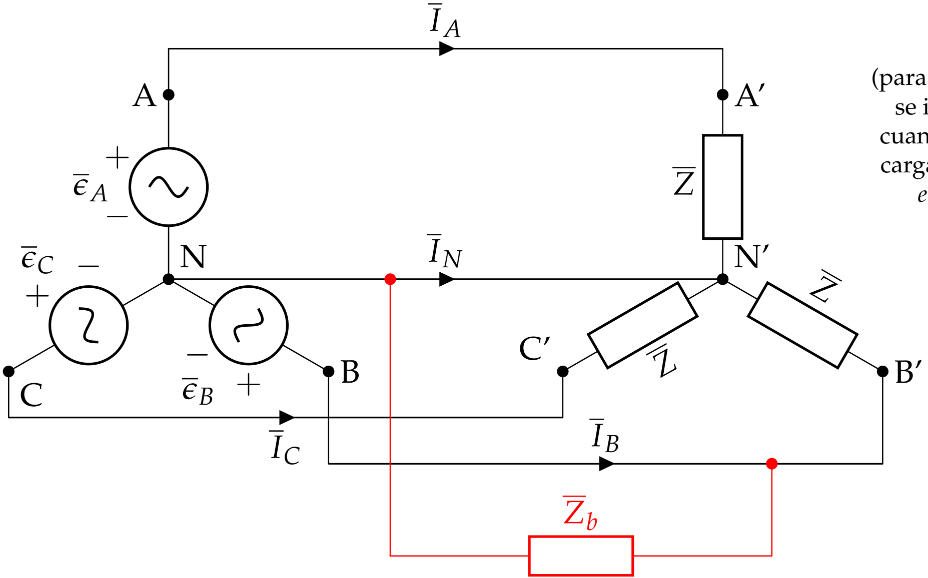
Ejercicio

Un sistema a cuatro hilos y SFI alimenta tres impedancias $\overline{Z} = 10\underline{/60^\circ}\ \Omega$, conectadas en estrella a una tensión de $200\sqrt{3}$ V

Determinar las corrientes de línea y el diagrama fasorial

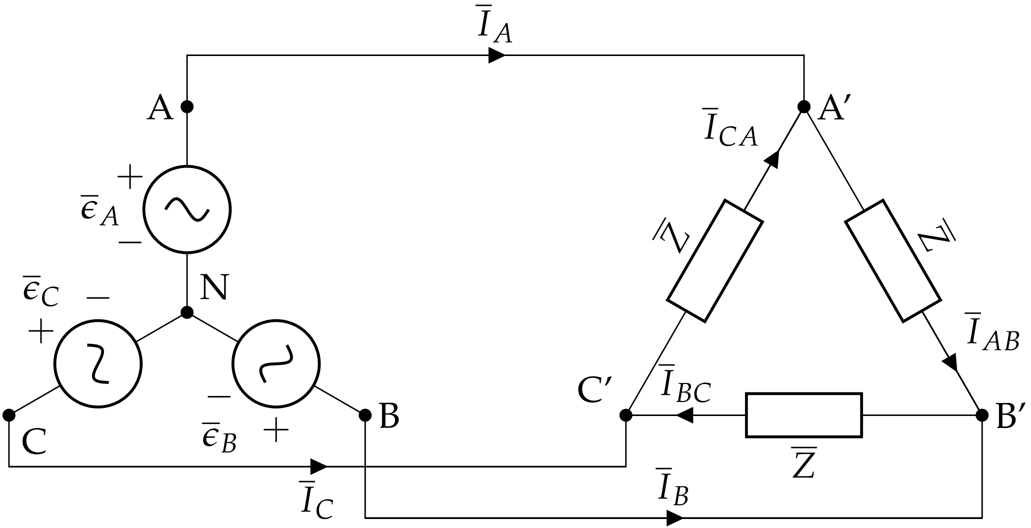
Solución: aquí

Receptor en estrella equilibrado, con carga monofásica

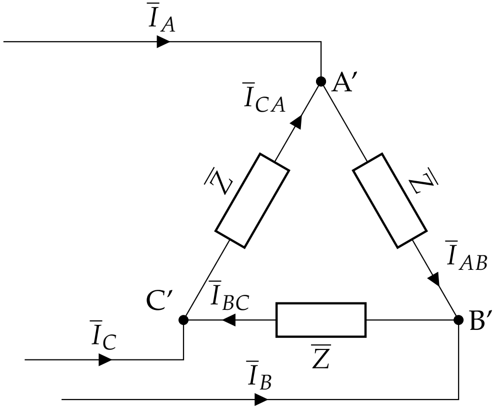


(para $Z_{\curlywedge}$ equilibrado, se incluye neutro cuando convive con cargas monofásicas, *e.g.* edificios)

Receptor en triángulo equilibrado



Receptor en triángulo equilibrado



$$\overline{I}_{AB} = \frac{\overline{U}_{AB}}{\overline{Z}} = \frac{U_L}{Z}\underline{/\pm 120^\circ - \theta}$$

$$\overline{I}_{BC} = \frac{\overline{U}_{BC}}{\overline{Z}} = \frac{U_L}{Z}\underline{/0 - \theta}$$

$$\overline{I}_{CA} = \frac{\overline{U}_{CA}}{\overline{Z}} = \frac{U_L}{Z}\underline{/\mp 120^\circ - \theta}$$

(signo de arriba para **SFD**, signo de abajo para **SFI**)

(en $\triangle$, tensión de línea igual a la de fase)

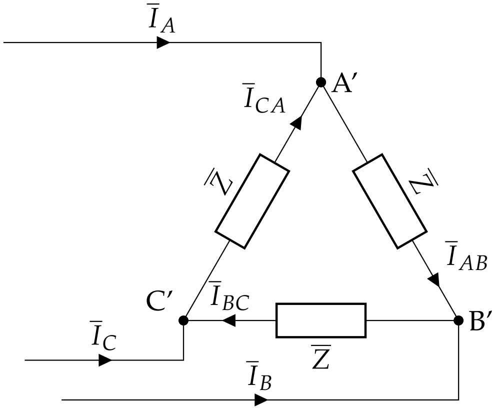
Por la misma razón que en la diapositiva 12:

$$\overline{I}_{AB} + \overline{I}_{BC} + \overline{I}_{CA} = 0$$

Corriente de **fase**:

$$\boxed{I_f = I_{AB} = I_{BC} = I_{CA} = \frac{U_L}{Z}}$$

Receptor en triángulo equilibrado



Para calcular las corrientes de línea, aplicamos **1LK** en cada nudo:

$$\bar{I}_A = \bar{I}_{AB} - \bar{I}_{CA} = \sqrt{3} \cdot \frac{U_L}{Z} \underline{/\pm 90^\circ - \theta}$$

$$\bar{I}_B = \bar{I}_{BC} - \bar{I}_{AB} = \sqrt{3} \cdot \frac{U_L}{Z} \underline{/\mp 30^\circ - \theta}$$

$$\bar{I}_C = \bar{I}_{CA} - \bar{I}_{BC} = \sqrt{3} \cdot \frac{U_L}{Z} \underline{/\mp 150^\circ - \theta}$$

Corriente de **línea**:

$$\boxed{I_L = I_A = I_B = I_C = \sqrt{3} \cdot \frac{U_L}{Z}}$$

$$\boxed{I_L = \sqrt{3} \cdot I_f}$$

Ejercicio

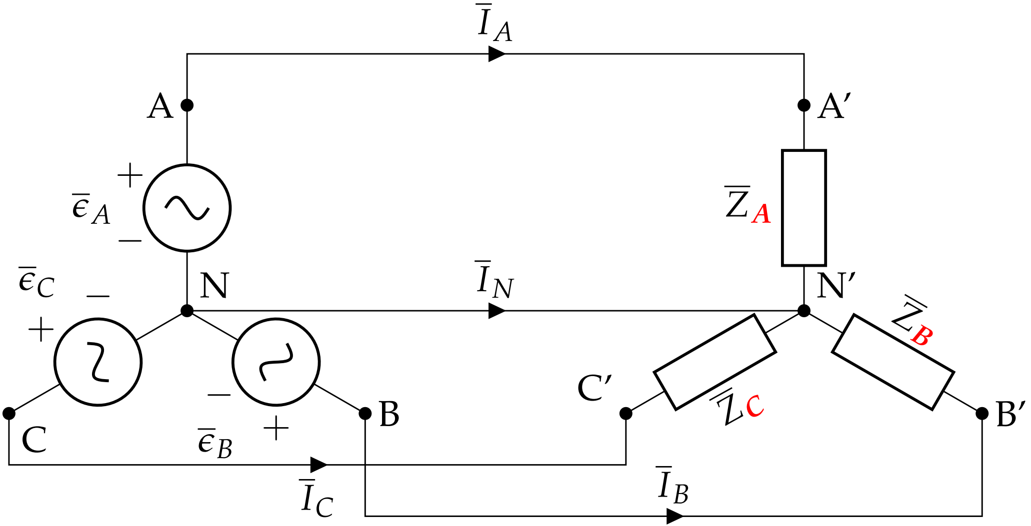
Un sistema trifásico de secuencia directa y tensión 200 V alimenta tres impedancias iguales $\overline{Z} = 10\underline{/30^\circ}\,\Omega$, conectadas en triángulo

Determinar las corrientes de fase y línea, y dibujar el diagrama fasorial

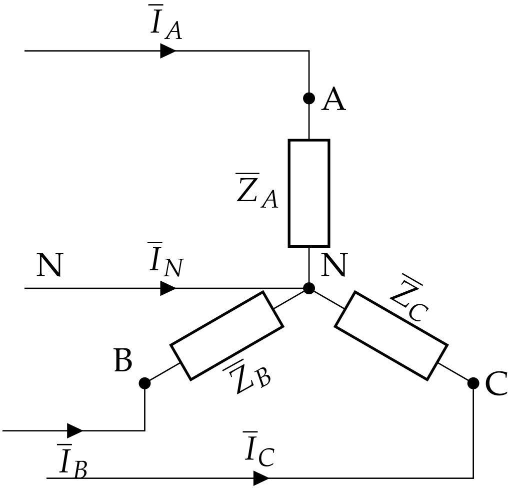
Solución: aquí

Receptor en estrella desequilibrado, con neutro

Si cada una de las impedancias es distinta, el receptor es **desequilibrado**



Receptor en estrella desequilibrado, con neutro



$$\overline{I}_A = \frac{\overline{U}_A}{\overline{\overline{Z}}_A}$$

$$\overline{I}_B = \frac{\overline{U}_B}{\overline{\overline{Z}}_B}$$

$$\overline{I}_C = \frac{\overline{U}_C}{\overline{\overline{Z}}_C}$$

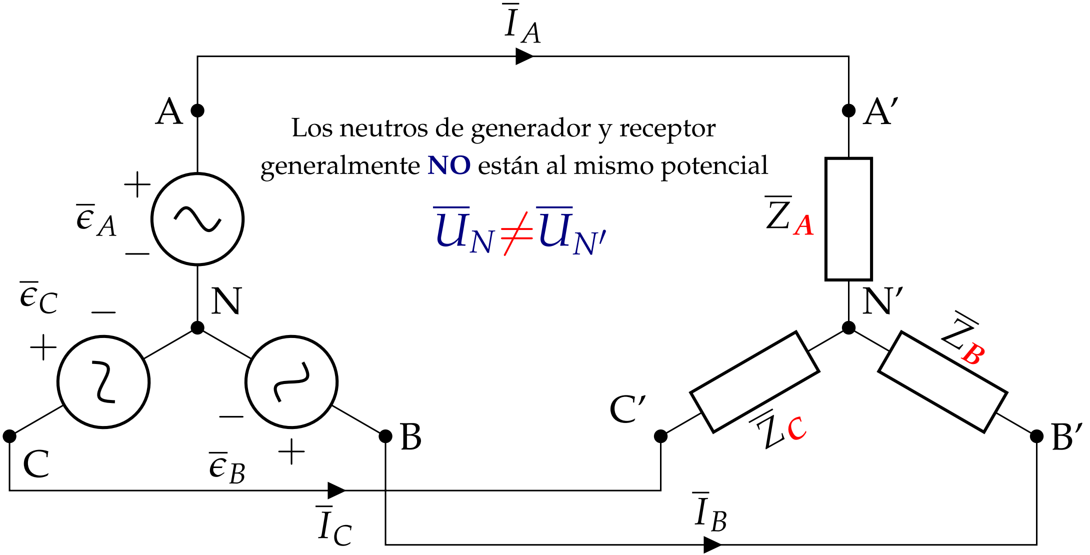
(cada corriente de fase/línea es **distinta**)

Aplicando **1LK** en el punto común del receptor:

$$\overline{I}_A + \overline{I}_B + \overline{I}_C + \overline{I}_N = 0$$

$$\overline{I}_A + \overline{I}_B + \overline{I}_C \neq 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{\overline{I}_N \neq 0}$$

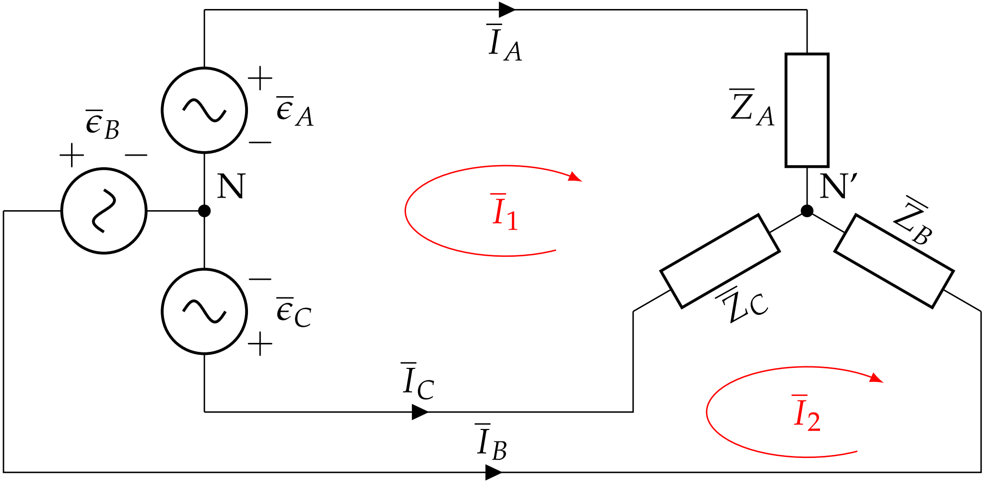
Receptor en estrella desequilibrado, sin neutro



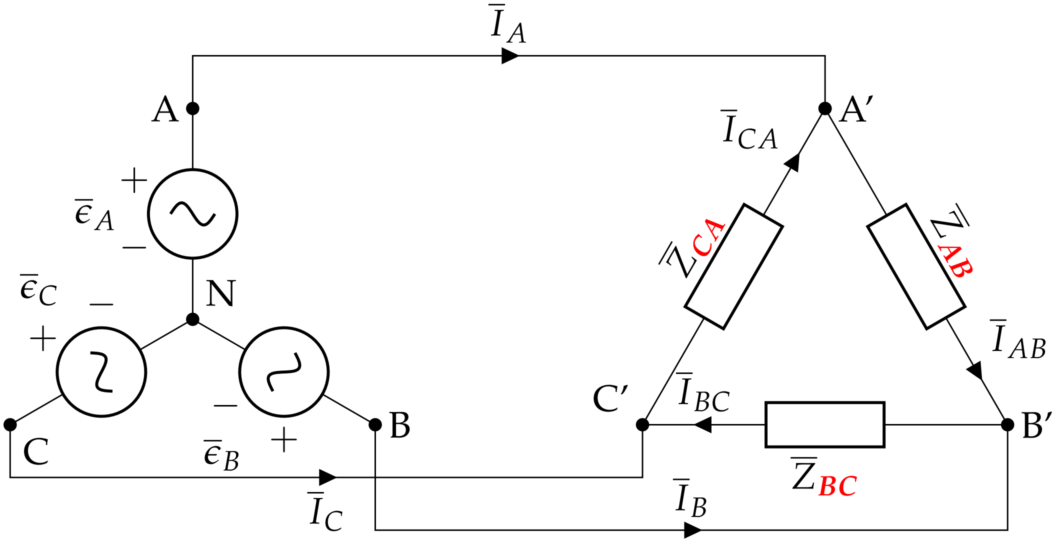
Receptor en estrella desequilibrado, sin neutro

En este caso **desconocemos la tensión** en las impedancias

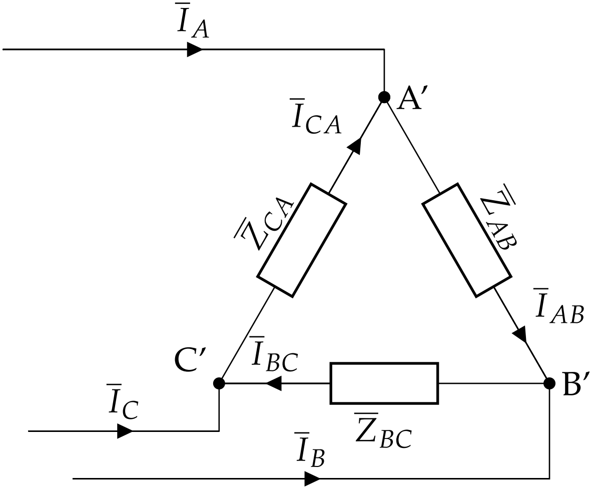
- Podría resolverse el circuito por el **método de las mallas**



Receptor en triángulo desequilibrado



Receptor en triángulo desequilibrado



$$\overline{I}_{AB} = \frac{\overline{U}_{AB}}{\overline{Z}_{AB}}$$

$$\overline{I}_{BC} = \frac{\overline{U}_{BC}}{\overline{Z}_{BC}}$$

$$\overline{I}_{CA} = \frac{\overline{U}_{CA}}{\overline{Z}_{CA}}$$

(cada corriente de fase es **distinta**)

$$\overline{I}_A = \overline{I}_{AB} - \overline{I}_{CA}$$
$$\overline{I}_B = \overline{I}_{BC} - \overline{I}_{AB}$$
$$\overline{I}_C = \overline{I}_{CA} - \overline{I}_{BC}$$

(luego cada corriente de línea es **distinta**)

Resumen

Conexión del receptor	Tensiones	Corrientes
⅄ equilibrado	$\sqrt{3}\,U_f = U_L$	$I_f = I_L$
△ equilibrado	$U_f = U_L$	$\sqrt{3}\,I_f = I_L$
⅄ desequilibrado, con neutro	$\sqrt{3}\,U_f = U_L$	Deben calcularse para cada impedancia
⅄ desequilibrado, sin neutro	Resolución por método de las mallas	
△ desequilibrado	$U_f = U_L$	Deben calcularse para cada impedancia

Nota: U_f en esta diapositiva se refiere a la tensión en cada fase del receptor (tensión en cada impedancia), **NO** a U_f del generador en estrella

Recordatorio del Tema 1: conversión $\curlywedge - \triangle$, caso equilibrado

En el caso de receptores estrella/triángulo **equilibrados**...

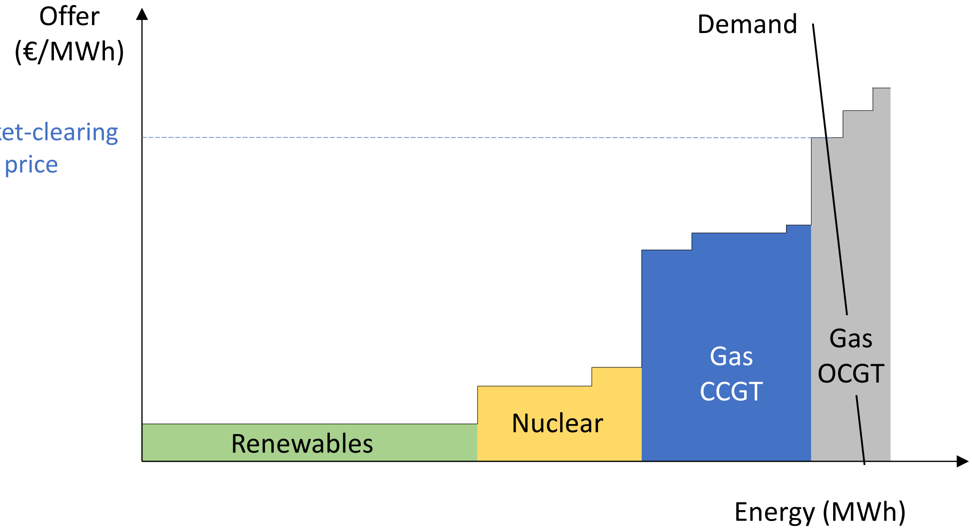
$$\overline{Z}_A = \overline{Z}_B = \overline{Z}_C \;=\; \overline{Z}_{\curlywedge}$$

$$\overline{Z}_{AB} = \overline{Z}_{BC} = \overline{Z}_{CA} \;=\; \overline{Z}_{\triangle}$$

...la expresión para **transformar** entre $\curlywedge - \triangle$ es:

$$\boxed{\overline{Z}_{\triangle} \;=\; 3 \cdot \overline{Z}_{\curlywedge}}$$

Interludio: mercado mayorista de electricidad



Potencia instantánea en sistemas equilibrados

Supongamos un **receptor equilibrado** con SFD (la deducción es equivalente para SFI):

$$\begin{cases} u_A(t) = \sqrt{2}\,U_f\,\cos(\omega t + \pi/2) \\ u_B(t) = \sqrt{2}\,U_f\,\cos(\omega t - \pi/6) \\ u_C(t) = \sqrt{2}\,U_f\,\cos(\omega t - 5\pi/6) \end{cases}$$

$$\begin{cases} i_A(t) = \sqrt{2}\,I_f\,\cos(\omega t + \pi/2 - \theta) \\ i_B(t) = \sqrt{2}\,I_f\,\cos(\omega t - \pi/6 - \theta) \\ i_C(t) = \sqrt{2}\,I_f\,\cos(\omega t - 5\pi/6 - \theta) \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_A(t) = u_A(t)\cdot i_A(t) \\ p_B(t) = u_C(t)\cdot i_B(t) \\ p_C(t) = u_C(t)\cdot i_C(t) \end{cases}$$

$$\boxed{p(t) = p_A(t) + p_B(t) + p_C(t)}$$

Potencia instantánea en sistemas equilibrados

$$\begin{aligned} p(t) &= \sqrt{2}\,U_f\,\cos(\omega t + \pi/2)\cdot\sqrt{2}\,I_f\,\cos(\omega t + \pi/2 - \theta) + \\ &\quad + \sqrt{2}\,U_f\,\cos(\omega t - \pi/6)\cdot\sqrt{2}\,I_f\,\cos(\omega t - \pi/6 - \theta) + \\ &\quad + \sqrt{2}\,U_f\,\cos(\omega t - 5\pi/6)\cdot\sqrt{2}\,I_f\,\cos(\omega t - 5\pi/6 - \theta) \end{aligned}$$

Usando la identidad $\cos(\alpha)\cdot\cos(\beta) = \frac{1}{2}\cdot[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$:

$$\begin{aligned} p(t) &= U_f\,I_f\,[\cos(2\omega t + \pi - \theta) + \cos(\theta)] + \\ &\quad + U_f\,I_f\,[\cos(2\omega t - \pi/3 - \theta) + \cos(\theta)] + \\ &\quad + U_f\,I_f\,[\cos(2\omega t - 5\pi/3 - \theta) + \cos(\theta)] \end{aligned}$$

(los términos en gris suman cero, recordad esta propiedad)

$$\boxed{p(t) = 3\cdot U_f\cdot I_f\cdot\cos(\theta) = \sqrt{3}\cdot U_L\cdot I_L\cdot\cos(\theta)}$$

Comparación con un sistema monofásico

En el Tema 2 dedujimos la expresión de la **potencia instantánea** en una **carga monofásica**:

$$\begin{aligned} p(t) &= U \cdot I \cos(\theta) + U \cdot I \cos(\theta) \cos(2\omega t) + U \cdot I \sin(\theta) \sin(2\omega t) = \\ &= P \cdot [1 + \cos(2\omega t)] + Q \cdot \sin(2\omega t) \end{aligned}$$

y calculamos también su valor medio, al que denominamos **potencia activa**:

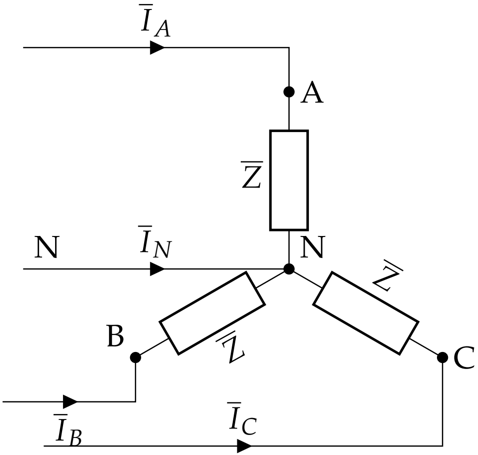
$$P_m = U\, I \cos(\theta)$$

Acabamos de deducir que, en un **sistema trifásico**, la **potencia instantánea es <u>constante</u>**:

$$p(t) = 3 \cdot U_f \cdot I_f \cdot \cos(\theta) = \sqrt{3} \cdot U_L \cdot I_L \cdot \cos(\theta)$$

(y su expresión es proporcional a la potencia media en un sistema monofásico)

Receptor en estrella equilibrado



Por el Tª de **Boucherot**:

$$
\begin{aligned}
P &= 3 \cdot P_Z = 3 \cdot U_f \cdot I_f \cdot \cos(\theta) \\
Q &= 3 \cdot Q_Z = 3 \cdot U_f \cdot I_f \cdot \sin(\theta)
\end{aligned}
$$

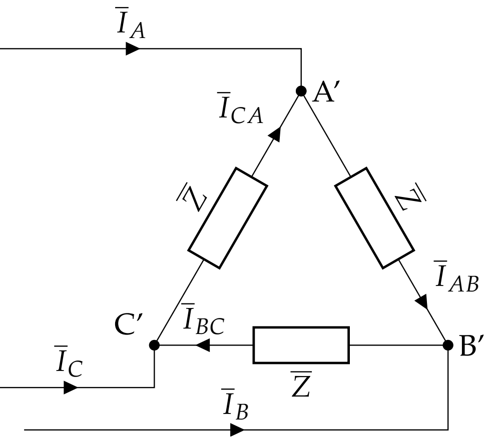
Relaciones en conexión $\curlywedge$:

$$I_f = I_L$$

$$U_f = \frac{U_L}{\sqrt{3}}$$

$$
\boxed{
\begin{aligned}
\boldsymbol{P} &= 3 \cdot U_f \cdot I_f \cdot \cos(\theta) = \sqrt{3} \cdot U_L \cdot I_L \cdot \cos(\theta) \\
\boldsymbol{Q} &= 3 \cdot U_f \cdot I_f \cdot \sin(\theta) = \sqrt{3} \cdot U_L \cdot I_L \cdot \sin(\theta) \\
\boldsymbol{S} &= \sqrt{P^2 + Q^2} = 3 \cdot U_f \cdot I_f = \sqrt{3} \cdot U_L \cdot I_L
\end{aligned}
}
$$

Receptor en triángulo equilibrado



Por el Tª de **Boucherot**:

$$\begin{aligned} P &= 3 \cdot P_Z = 3 \cdot U_f \cdot I_f \cdot \cos(\theta) \\ Q &= 3 \cdot Q_Z = 3 \cdot U_f \cdot I_f \cdot \sin(\theta) \end{aligned}$$

Relaciones en conexión $\triangle$:

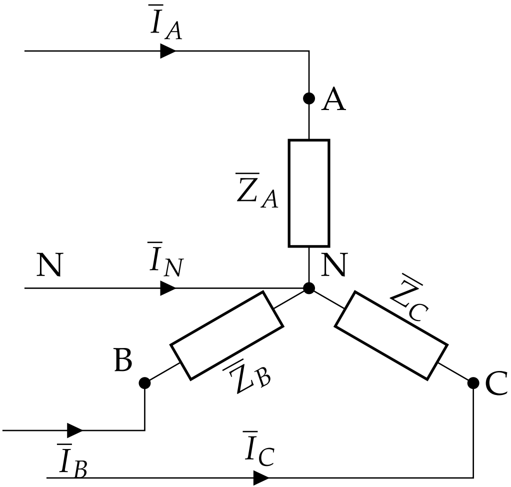
$$I_f = \frac{I_L}{\sqrt{3}}$$

$$U_f = U_L$$

$$\boxed{\begin{aligned} \boldsymbol{P} &= 3 \cdot U_f \cdot I_f \cdot \cos(\theta) = \sqrt{3} \cdot U_L \cdot I_L \cdot \cos(\theta) \\ \boldsymbol{Q} &= 3 \cdot U_f \cdot I_f \cdot \sin(\theta) = \sqrt{3} \cdot U_L \cdot I_L \cdot \sin(\theta) \\ \boldsymbol{S} &= \sqrt{P^2 + Q^2} = 3 \cdot U_f \cdot I_f = \sqrt{3} \cdot U_L \cdot I_L \end{aligned}}$$

(**mismas expresiones** que para $\perp$ equilibrado)

Receptor en estrella desequilibrado



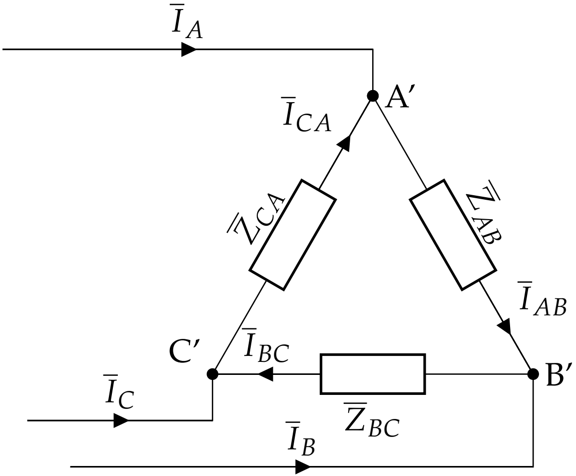
La **potencia** en cada fase puede ser **distinta**, luego hay que calcular cada una y aplicar el Tª de Boucherot:

$$P = P_A + P_B + P_C$$

$$Q = Q_A + Q_B + Q_C$$

$$\overline{S} = P + jQ$$

Receptor en triángulo desequilibrado



La **potencia** en cada fase puede ser **distinta**, luego hay que calcular cada una y aplicar el Tª de Boucherot:

$$P = P_{AB} + P_{BC} + P_{CA}$$

$$Q = Q_{AB} + Q_{BC} + Q_{CA}$$

$$\overline{S} = P + jQ$$

Comparativa entre monofásica y trifásica equilibrada

Comparemos un sistema monofásico y un sistema trifásico (a 3 hilos, *i.e.*, sin neutro) que transmiten la **misma potencia activa** y funcionan a la **misma tensión entre líneas**:

$$P_{\text{mono}} = U \cdot I_{\text{mono}} \cdot \cos\theta \quad = \quad P_{\text{tri}} = \sqrt{3}\, U_L \cdot I_{\text{tri}} \cdot \cos\theta \quad \rightarrow \quad \boxed{I_{\text{mono}} = \sqrt{3}\, I_{\text{tri}}}$$

Las **pérdidas en la línea** deben ser **iguales** para salvar la **misma distancia**:

$$P_{\text{mono, línea}} = 2 \cdot R_{\text{mono, línea}} \cdot I_{\text{mono}}^2 \quad = \quad P_{\text{tri, líneas}} = 3 \cdot R_{\text{tri, línea}} \cdot I_{\text{tri}}^2$$

Sustituyendo la relación de corrientes y teniendo en cuenta la relación entre resistencia y sección (área):

$$2 \cdot R_{\text{mono, línea}} \cdot (\sqrt{3}\, I_{\text{tri}})^2 = 3 \cdot R_{\text{tri, línea}} \cdot I_{\text{tri}}^2 \;\rightarrow\; R_{\text{mono, línea}} = \frac{1}{2} R_{\text{tri, línea}} \;\rightarrow\; \boxed{A_{\text{mono}} = 2 \cdot A_{\text{tri}}}$$

Finalmente, la **relación** entre **masas de conductor** es:

$$\frac{m_{\text{tri}}}{m_{\text{mono}}} = \frac{3 \cdot A_{\text{tri}}}{2 \cdot A_{\text{mono}}} = \frac{3}{4} \quad \rightarrow \quad \boxed{m_{\text{tri}} = 75\,\% \cdot m_{\text{mono}}}$$

Mejora del factor de potencia

- Consideremos un **receptor equilibrado inductivo** del que conocemos P, Q y, por tanto, su factor de potencia '$\cos\theta$'

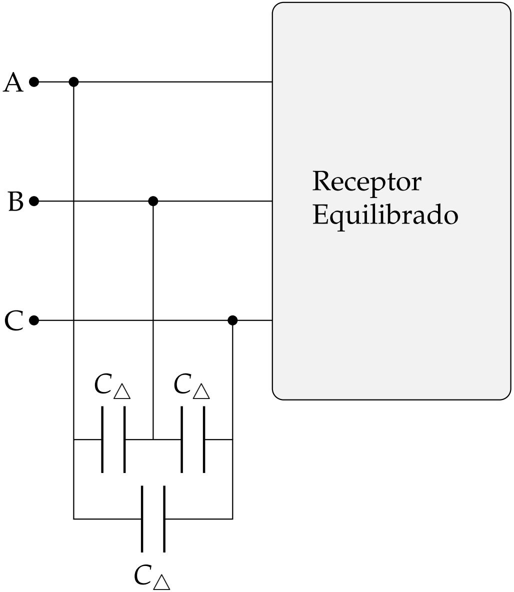
- Para reducir la potencia reactiva del sistema debemos instalar un **banco de condensadores** que suministrarán una potencia reactiva Q_c

- Como resultado, la **potencia reactiva** y el **f.d.p.** del sistema serán:

$$Q' = Q - Q_c \qquad\qquad \cos\theta' > \cos\theta$$

- En trifásica existen **dos posibilidades**:
  - Conexión en triángulo: $C_{\triangle}$
  - Conexión en estrella: $C_{\curlywedge}$

Conexión de condensadores en triángulo



Independientemente de si el receptor está conectado en $\perp$ o en $\triangle$:

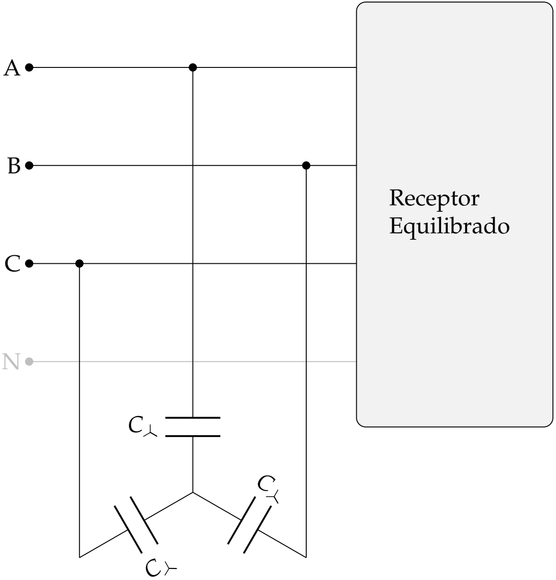
$$Q = P \cdot \tan\theta$$

$$Q' = P \cdot \tan\theta' = Q - Q_c$$

$$Q_c = \underbrace{3}_{\text{Boucherot}} \cdot \omega\, C_\triangle \cdot \boldsymbol{U_L}^2$$

$$\boxed{C_\triangle = \frac{P \cdot (\tan\theta - \tan\theta')}{\mathbf{3} \cdot \omega\, U_L^2}}$$

Conexión de condensadores en estrella



Independientemente de si el receptor está conectado en $\curlywedge$ o en $\triangle$:

$$Q = P \cdot \tan\theta$$

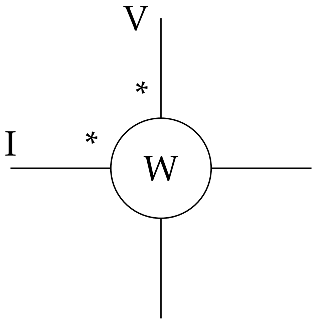
$$Q' = P \cdot \tan\theta' = Q - Q_c$$

$$Q_c = \underbrace{3}_{\text{Boucherot}} \cdot \omega\, C_\curlywedge \cdot \boldsymbol{U_f}^2 = \cancel{3} \cdot \omega\, C_\curlywedge \cdot \left(\frac{U_L}{\cancel{\sqrt{3}}}\right)^2$$

$$\boxed{C_\curlywedge = \frac{P \cdot (\tan\theta - \tan\theta')}{\omega\, U_L^2}}$$

(la **capacidad necesaria** en $\curlywedge$ es 3 veces mayor que en $\triangle$)

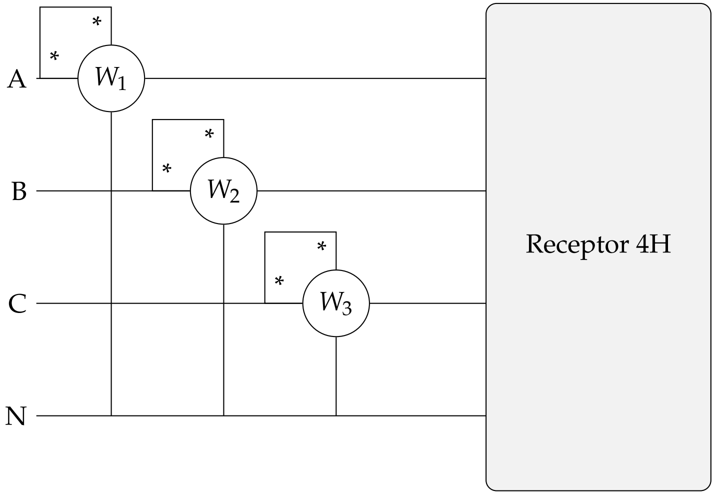
Recordatorio: vatímetro



Equipo de medida de **4 terminales** (un par para tensión, un par para corriente)

$$W = \underbrace{\bar{I} \bullet \overline{U}}_{\text{producto escalar}} = I \cdot U \cdot \cos(\widehat{\bar{I}, \overline{U}}) = \Re(\underbrace{\overline{U} \cdot \bar{I}^*}_{\text{potencia aparente}})$$

Sistema a 4 hilos (4H), caso general



En el caso general, el receptor puede ser **desequilibrado** $\rightarrow$ **potencia distinta** en cada fase

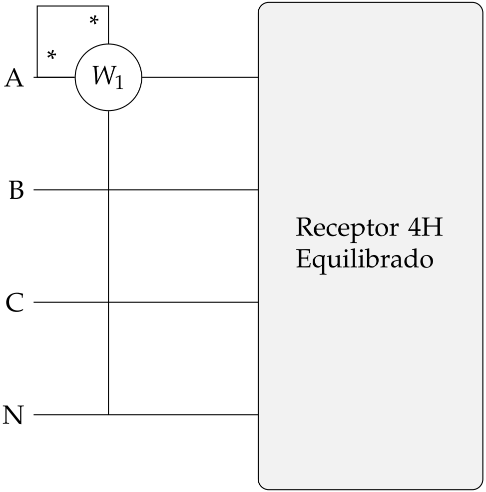
Son necesarios **3 vatímetros**, uno por fase:

$$W_1 = \Re(\overline{U}_A \cdot \overline{I}_A^*) = P_A$$
$$W_2 = \Re(\overline{U}_B \cdot \overline{I}_B^*) = P_B$$
$$W_3 = \Re(\overline{U}_C \cdot \overline{I}_C^*) = P_C$$

Por el Tª de **Boucherot**:

$$\boxed{P = W_1 + W_2 + W_3}$$

Sistema a 4 hilos (4H), caso equilibrado



En el caso de un receptor **equilibrado** $\rightarrow$ **misma potencia** en todas las fases

Basta con **1 vatímetro**:

$$P_A = P_B = P_C$$

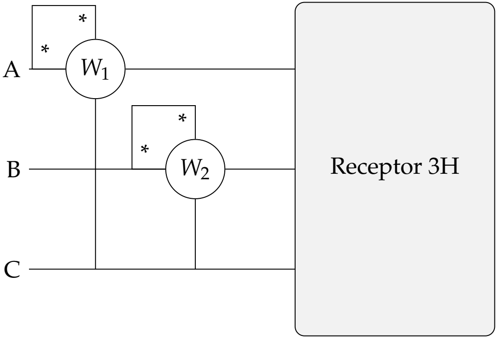
Por el Tª de **Boucherot**:

$$\boxed{P = 3 \cdot W_1}$$

Sistema a 3 hilos (3H)

NO es posible usar 3 vatímetros, porque no es posible medir P en cada Z **por separado**:

- Si el **receptor** está conectado en ⅄: no es posible medir la **tensión de fase**
- Si el **receptor** está conectado en $\triangle$: no es posible medir la **corriente de fase**



Pero **existe un método** para medida de potencia en sistemas a 3 hilos

- Válido tanto para receptores en ⅄ como en $\triangle$, equilibrados o desequilibrados

El "método de los **2 vatímetros**",
o "montaje de **Aron**"

$$\boxed{P = W_1 + W_2}$$

(demostración a continuación)

Método de los 2 vatímetros: demostración

Para un **receptor** en $\curlywedge$ (sin asumir que sea necesariamente equilibrado)

Potencia total en el receptor:

$$\overline{S} = \overline{S}_A + \overline{S}_B + \overline{S}_C = \overline{U}_A \cdot \overline{I}_A^* + \overline{U}_B \cdot \overline{I}_B^* + \overline{U}_C \cdot \overline{I}_C^*$$

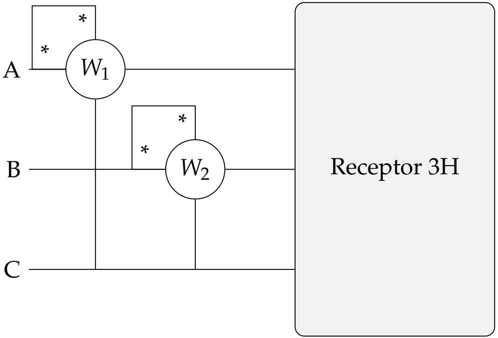
Al no haber conductor neutro (**3 hilos**), por **1LK** en el punto común de la $\curlywedge$:

$$\overline{I}_A + \overline{I}_B + \overline{I}_C = 0 \quad \rightarrow \quad \overline{I}_C = -(\overline{I}_A + \overline{I}_B)$$

Sustituyendo en la 1ª expresión y agrupando términos:

$$\overline{S} = \overline{U}_{AC} \cdot \overline{I}_A^* + \overline{U}_{BC} \cdot \overline{I}_B^*$$

$$P = \Re(\overline{U}_{AC} \cdot \overline{I}_A^* + \overline{U}_{BC} \cdot \overline{I}_B^*) = \boxed{W_1 + W_2}$$



Método de los 2 vatímetros: demostración

Para un **receptor** en $\triangle$ (sin asumir que sea necesariamente equilibrado)

Potencia total $\rightarrow$ $\overline{S} = \overline{S}_{AB} + \overline{S}_{BC} + \overline{S}_{CA} = \overline{U}_{AB} \cdot \overline{I}^*_{AB} + \overline{U}_{BC} \cdot \overline{I}^*_{BC} + \overline{U}_{CA} \cdot \overline{I}^*_{CA}$

Aplicando **2LK** en el $\triangle$ del receptor:

$$\overline{U}_{AB} + \overline{U}_{BC} + \overline{U}_{CA} = 0 \;\rightarrow\; \overline{U}_{AB} = -(\overline{U}_{BC} + \overline{U}_{CA})$$

y aplicando **1LK** en los nudos del receptor:

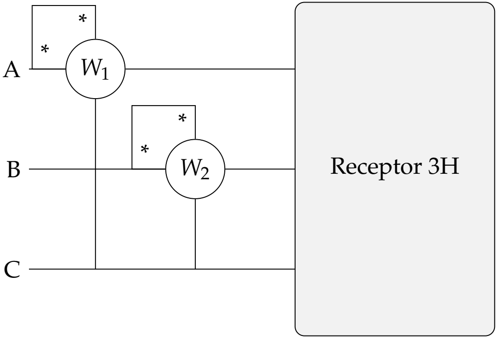
$$\overline{I}_{CA} = \overline{I}_{AB} - \overline{I}_{A}\,, \quad \overline{I}_{BC} = \overline{I}_{B} + \overline{I}_{AB}$$

Sustituyendo en la 1ª expresión y agrupando:

$$\overline{S} = \overline{U}_{AC} \cdot \overline{I}^*_{A} + \overline{U}_{BC} \cdot \overline{I}^*_{B}$$

$$P = \Re(\overline{U}_{AC} \cdot \overline{I}^*_{A} + \overline{U}_{BC} \cdot \overline{I}^*_{B}) = \boxed{W_1 + W_2}$$

(**mismo resultado** que en $\curlywedge$)

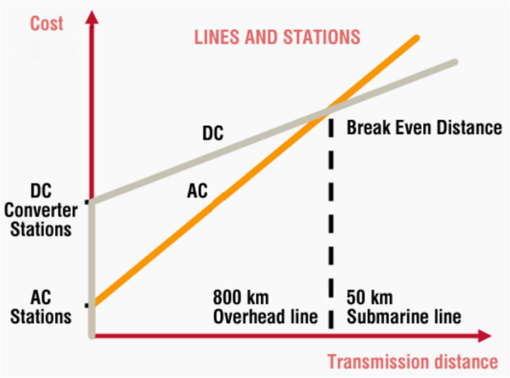


Resumen, medida de potencia en sistemas trifásicos

Conexión del receptor	N° de vatímetros necesarios
$\curlywedge$ a 4 hilos (**con** neutro), equilibrado	1
$\curlywedge$ a 4 hilos (**con** neutro), **des**equilibrado	3
$\curlywedge$ a 3 hilos (**sin** neutro), equilibrado o **des**equilibrado	2 (montaje de Aron)
$\triangle$ equilibrado o **des**equilibrado, ($\triangle$ implica 3 hilos)	2 (montaje de Aron)

Interludio: corriente continua de alta tensión (*HVDC*)

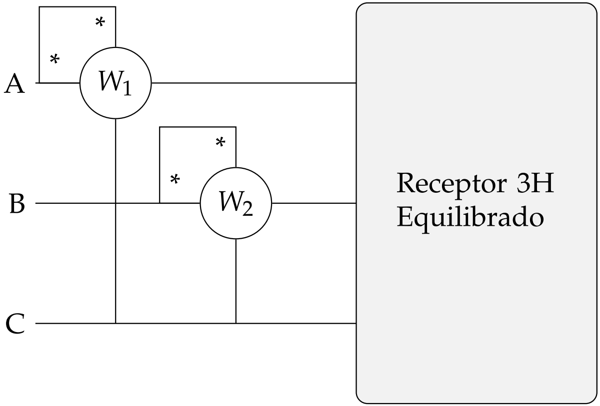
- Más **económica** que corriente alterna para **largas distancias** o **cables submarinos**



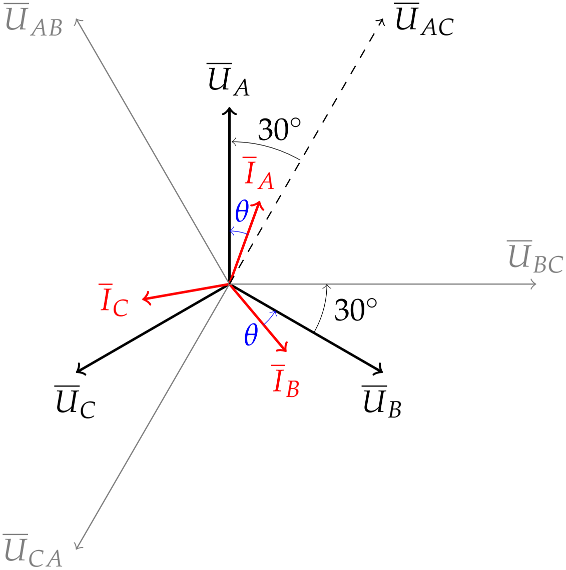
- Proyecto Xlinks:
  3.800 km de cables submarinos HVDC

Método de los 2 vatímetros, caso particular: receptor equilibrado

- En el caso particular de un **receptor equilibrado**, el método de los 2 vatímetros aporta **información adicional** $\rightarrow$ también permite medir **potencia reactiva**
- Para demostrarlo, consideramos un **receptor** de carácter **inductivo**, tanto en **SFD** como en **SFI** (ver siguientes 2 diapositivas)



Método de los 2 vatímetros: receptor equilibrado, SFD



$$W_1 = \overline{U}_{AC} \bullet \overline{I}_A = U_L \cdot I_L \cdot \overbrace{\cos(30° - \theta)}^{\text{ver gráfico}}$$

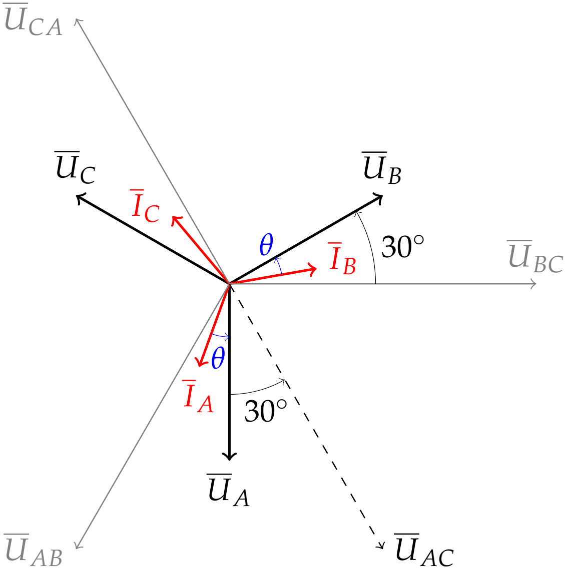
$$W_2 = \overline{U}_{BC} \bullet \overline{I}_B = U_L \cdot I_L \cdot \underbrace{\cos(30° + \theta)}_{\text{ver gráfico}}$$

Usando $\cos(\alpha - \beta)$ se llega a:

$$\boxed{W_1 + W_2 = \sqrt{3}\, U_L\, I_L \cos\theta = P}$$

$$\boxed{W_1 - W_2 = U_L\, I_L \sin\theta = \frac{Q}{\sqrt{3}}}$$

Método de los 2 vatímetros: receptor equilibrado, SFI



Los únicos cambios para **SFI** son:

$$W_1 = \overline{U}_{AC} \bullet \overline{I}_A = U_L \cdot I_L \cdot \overbrace{\cos(30^\circ + \theta)}^{\text{ver gráfico}}$$

$$W_2 = \overline{U}_{BC} \bullet \overline{I}_B = U_L \cdot I_L \cdot \underbrace{\cos(30^\circ - \theta)}_{\text{ver gráfico}}$$

Usando $\cos(\alpha - \beta)$ se llega a:

$$\boxed{W_1 + W_2 = \sqrt{3}\, U_L\, I_L\, \cos\theta = P}$$

$$\boxed{W_1 - W_2 = -\, U_L\, I_L\, \sin\theta = -\frac{Q}{\sqrt{3}}}$$

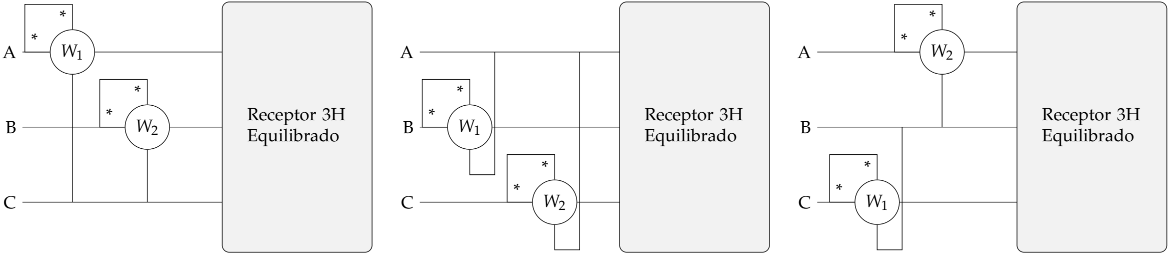
Método de los 2 vatímetros: receptor equilibrado, otras conexiones

Aunque hasta ahora hemos considerado que W_1 mide la tensión U_{AC} y W_2 la tensión U_{BC}, existen **3 posibilidades de conexión** para el método de los 2 vatímetros

Para aplicar las expresiones ya vistas para P y Q en cualquier conexión, usamos esta **regla mnemotécnica**:

- $\boldsymbol{W_1}$ mide una **tensión que** $\notin$ a la secuencia de fases
- $\boldsymbol{W_2}$ mide una **tensión que** $\in$ a la secuencia de fases

(en las 2 siguientes diapositivas se define cuándo una tensión "pertenece" a la secuencia de fases)

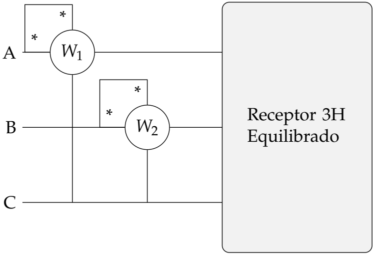


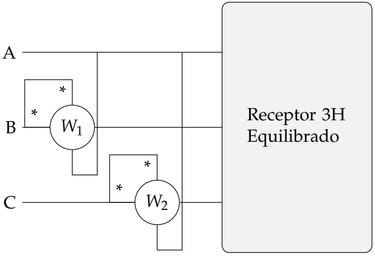
Otras conexiones de vatímetros, SFD

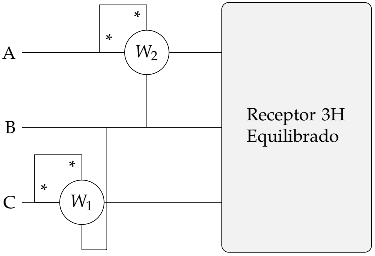
La tensiones que "pertenecen" a **SFD** son:

$$\boxed{(ABC) : A \triangleright B \triangleright C \Longrightarrow \{AB, BC, CA\}}$$

$$P = W_1 + W_2 \qquad Q = \sqrt{3}\,(W_1 - W_2)$$







$\mathbf{W_1} : AC \notin \text{SFD}$

$\mathbf{W_2} : BC \in \text{SFD}$

$\mathbf{W_1} : BA \notin \text{SFD}$

$\mathbf{W_2} : CA \in \text{SFD}$

$\mathbf{W_1} : CB \notin \text{SFD}$

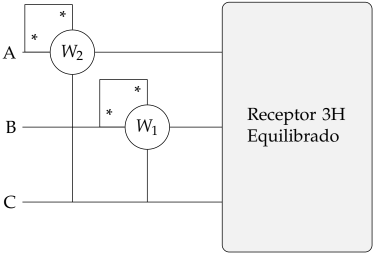
$\mathbf{W_2} : AB \in \text{SFD}$

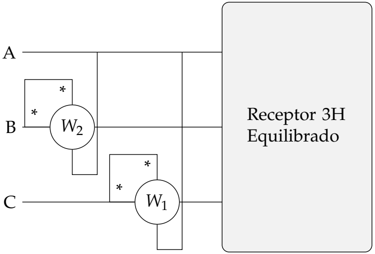
Otras conexiones de vatímetros, SFI

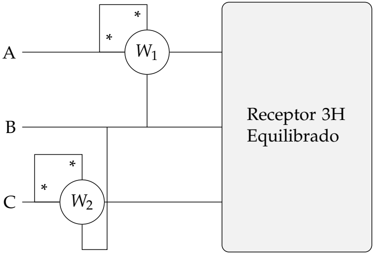
La tensiones que "pertenecen" a **SFI** son:

$$\boxed{(ACB) : A \triangleright C \triangleright B \Longrightarrow \{AC, CB, BA\}}$$

$$P = W_1 + W_2 \qquad Q = \sqrt{3}\,(W_1 - W_2)$$







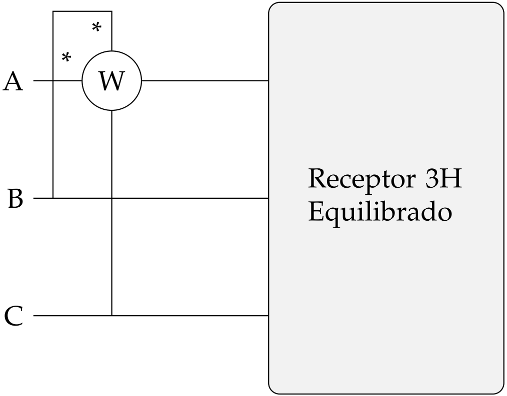
$\mathbf{W_1} : BC \notin$ SFI
$\mathbf{W_2} : AC \in$ SFI

$\mathbf{W_1} : CA \notin$ SFI
$\mathbf{W_2} : BA \in$ SFI

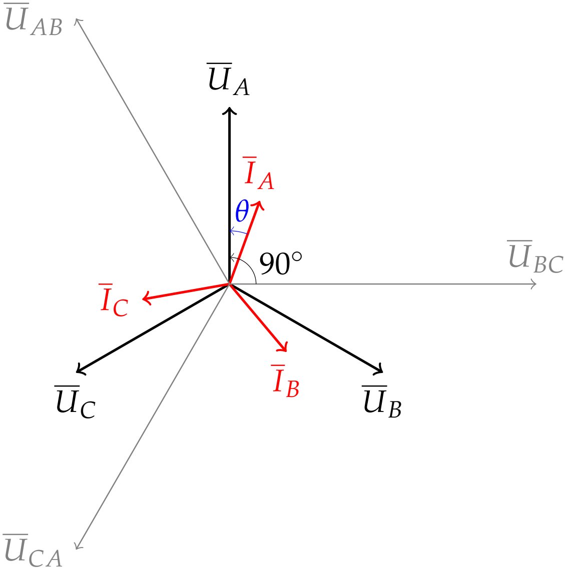
$\mathbf{W_1} : AB \notin$ SFI
$\mathbf{W_2} : CB \in$ SFI

Medida de reactiva con 1 vatímetro (sistemas equilibrados)

- En el caso particular de un **receptor equilibrado** a 3 hilos, también es posible medir **potencia reactiva** con un único vatímetro
- Para demostrarlo, consideramos un **receptor** de carácter **inductivo**, tanto en **SFD** como en **SFI** (ver siguientes 2 diapositivas)



Medida de reactiva con 1 vatímetro, SFD

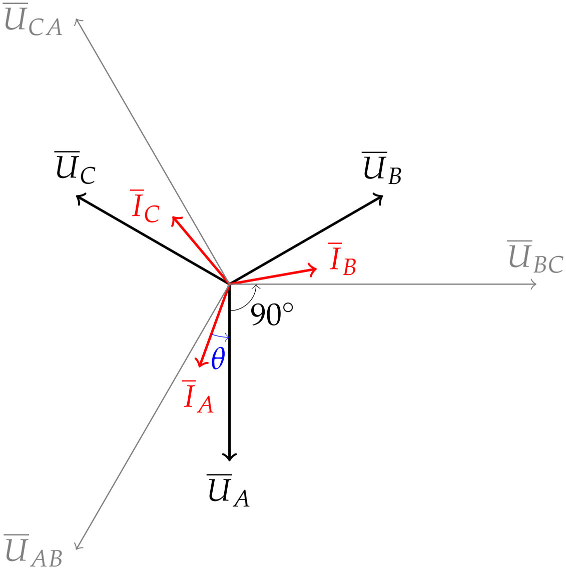


$$W = \overline{U}_{BC} \bullet \overline{I}_A = U_L \cdot I_L \cdot \overbrace{\cos(90° - \theta)}^{\text{ver gráfico}}$$

Usando $\cos(\alpha - \beta)$ se llega a:

$$\boxed{W = U_L \, I_L \, \sin\theta = \frac{Q}{\sqrt{3}}}$$

Medida de reactiva con 1 vatímetro, SFI



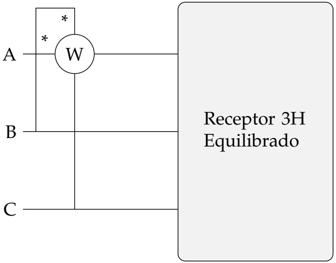
El único cambio para **SFI** es:

$$W = \overline{U}_{BC} \bullet \overline{I}_A = U_L \cdot I_L \cdot \overbrace{\cos(90^\circ + \theta)}^{\text{ver gráfico}}$$

Usando $\cos(\alpha - \beta)$ se llega a:

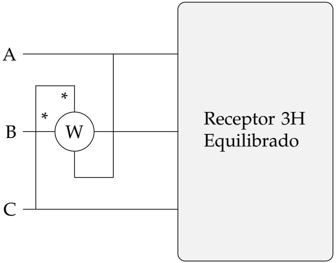
$$\boxed{W = -\, U_L\, I_L\, \sin\theta = -\, \frac{Q}{\sqrt{3}}}$$

Medida de reactiva con 1 vatímetro, otras conexiones



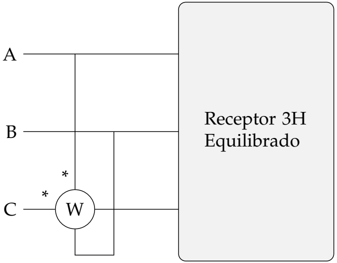
$BC \in$ SFD

$BC \notin$ SFI



$CA \in$ SFD

$CA \notin$ SFI



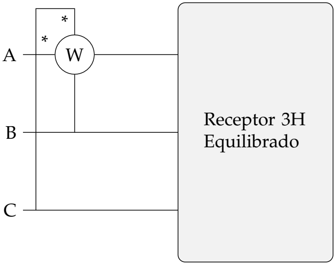
$AB \in$ SFD

$AB \notin$ SFI

$$\text{SFD} \rightarrow \boxed{W = \frac{Q}{\sqrt{3}}}$$

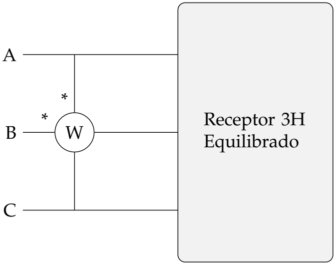
$$\text{SFI} \rightarrow \boxed{W = -\frac{Q}{\sqrt{3}}}$$

Medida de reactiva con 1 vatímetro, otras conexiones



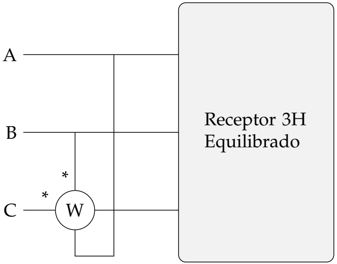
$CB \notin$ SFD

$CB \in$ SFI



$AC \notin$ SFD

$AC \in$ SFI



$BA \notin$ SFD

$BA \in$ SFI

$$\text{SFD} \rightarrow \boxed{W = -\frac{Q}{\sqrt{3}}}$$

$$\text{SFI} \rightarrow \boxed{W = \frac{Q}{\sqrt{3}}}$$

Resumen, potencia en receptores equilibrados a 3 hilos

Método de los **2 vatímetros** (o "montaje de Aron")

- Permite medir $\boldsymbol{P}$ y $\dfrac{\boldsymbol{Q}}{\sqrt{\boldsymbol{3}}}$ (importante recordar el factor $\sqrt{3}$ en Q)
- Cuidado con el **signo** de $\boldsymbol{Q}$:
  depende de la **conexión** de los vatímetros y de la **secuencia de fases** (SFD o SFI)
  (regla mnemotécnica aquí)

Medida de **reactiva** con **1 vatímetro**

- Debe medir **una corriente de línea** y la **tensión entre las otras dos** líneas
- Importante recordar el factor $\sqrt{\boldsymbol{3}}$ en $\boldsymbol{Q}$
- Cuidado con el **signo** de $\boldsymbol{Q}$:
  depende de la **conexión** y de la **secuencia de fases** (ver diapositivas 70 y 71)