Teoremas fundamentales

Teoría de Circuitos

Autor: Luis Badesa Bernardo

Circuitos lineales

Un circuito eléctrico es **lineal** si los elementos pasivos y activos que incluye son lineales:

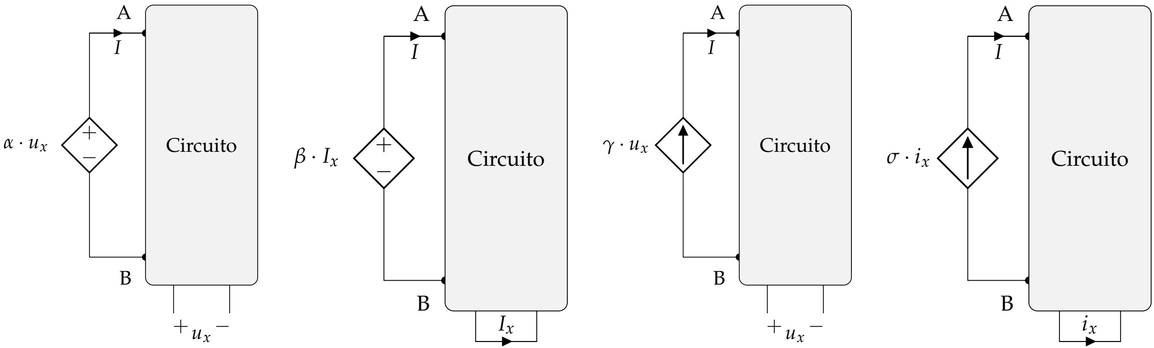
- **Elemento pasivo**: la relación entre tensión y corriente es lineal (R, L, C)
- **Fuente dependiente**: su salida tiene una relación lineal con la magnitud del circuito de la que depende

Propiedades:

- **Proporcionalidad** u homogeneidad
- **Superposición** o aditividad

Generadores dependientes

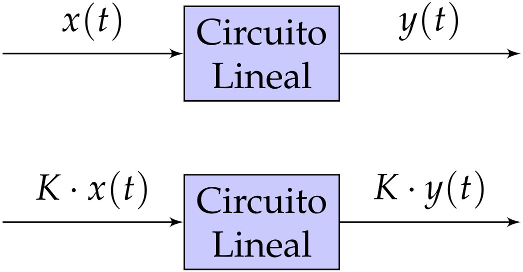
No tienen valores de ϵ_g o I_g fijos, sino que estos **dependen de la tensión o corriente en otros puntos de la red**:



Proporcionalidad

$y(t)$ es la respuesta de un **circuito lineal** a una excitación $x(t)$

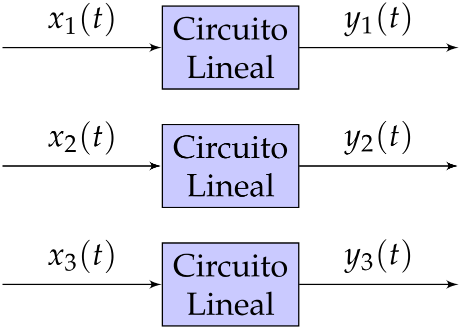
Si la excitación es multiplicada por una **constante**, $K \cdot x(t)$, la respuesta del circuito será modificada por la misma constante, $K \cdot y(t)$

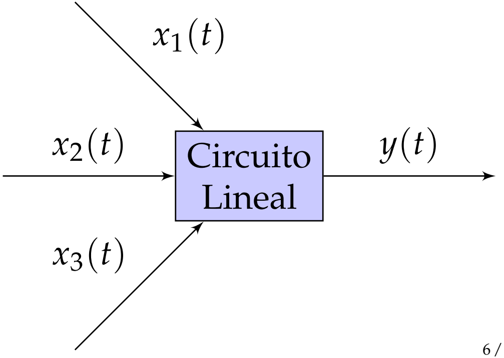


Superposición

La respuesta de un **circuito lineal** a varias fuentes de excitación actuando simultáneamente es igual a la **suma de las respuestas** que se tendrían cuando actuase cada una de ellas por separado

$$y(t) = \sum_i y_i(t)$$





Análisis de un circuito mediante superposición

Procedimiento

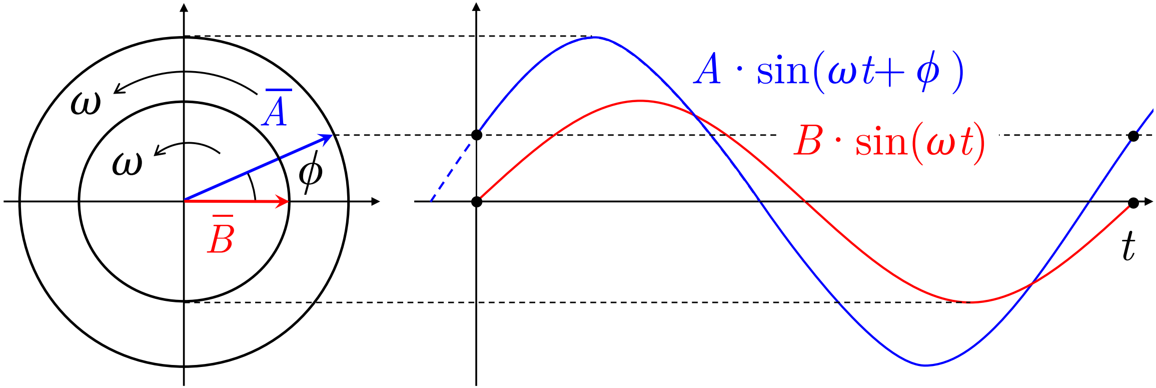
1. Se **eliminan** todas las **fuentes independientes** del circuito menos una
   - Las fuentes de **tensión** se sustituyen por un **cortocircuito** ($U = 0$)
   - Las fuentes de **corriente** se sustituyen por un **circuito abierto** ($I = 0$)
   - Las fuentes **dependientes no se modifican**
2. Se analiza el circuito, obteniendo la **respuesta individual** a la fuente que permanece activa
3. Se repite este procedimiento para **cada una de las fuentes independientes** del circuito
4. La respuesta total del circuito es la **suma de las respuestas individuales**

Análisis de un circuito mediante superposición

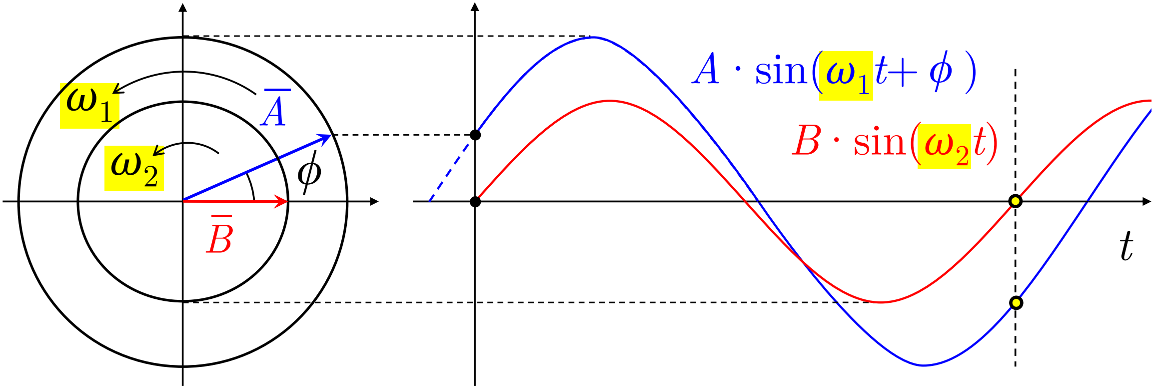
Observaciones

- **Siempre** hay que **aplicar este método** cuando en un circuito conviven **fuentes de distinta frecuencia** (o fuentes de corriente continua y corriente alterna)
- En el caso de fuentes de **corriente alterna senoidal**:
  - **Para cada frecuencia**, las bobinas y condensadores presentarán **diferente reactancia**, por lo que habrá que calcularlas
  - La respuesta total debe expresarse en el **dominio del tiempo** (**NO** se pueden **sumar fasores** que corresponden a **frecuencias diferentes**)
- En el primer paso del procedimiento, se pueden **agrupar las fuentes que funcionan a la misma frecuencia** y calcular la respuesta del circuito en esa frecuencia

Recordatorio: el cálculo fasorial es válido para señales de igual ω



...pero NO para señales de distinta frecuencia ($\omega_1 \neq \omega_2$)



Principio de superposición y potencia

El principio de superposición aplica a tensiones y corrientes, pero **NO a potencias**

(ya que potencia es el resultado de una **operación no lineal**, el producto de corriente y tensión)

Supongamos $i(t) = i_1(t) + i_2(t)$:

$$\begin{aligned} p(t) &= R \cdot i^2(t) = \\ &= R \cdot [i_1(t) + i_2(t)]^2 = \\ &= R \cdot [i_1^2(t) + i_2^2(t) + 2 \cdot i_1(t) \cdot i_2(t)] \\ &= p_1(t) + p_2(t) + 2\,R \cdot i_1(t) \cdot i_2(t) \end{aligned}$$

$$\boxed{p(t) \neq p_1(t) + p_2(t)}$$

Principio de superposición y potencia

- Cuando las señales son **ortogonales en un periodo**[*] se pueden sumar las **potencias medias** de cada circuito:

$$P = \sum_i P_i$$

- Ejemplos de señales ortogonales:
  senoidales con diferente frecuencia, una senoidal con una continua…

[*]Dos señales son ortogonales si cumplen la siguiente propiedad:

$$< f_1, f_2 >_T \; = \int_T f_1(t) \cdot f_2(t)\, dt = 0$$

Principio de superposición y potencia

- Cuando las señales son **ortogonales en un periodo**, se pueden sumar las **potencias medias** de cada circuito:

$$
\begin{aligned}
P_m &= \frac{1}{T}\int_T p(t)\,dt = \\
&= R\cdot\frac{1}{T}\left[\int_T i_1^2(t)\,dt + \int_T i_2^2(t)\,dt + \underbrace{\cancelto{0}{\int_T 2\cdot i_1(t)\cdot i_2(t)\,dt}}_{\text{señales ortogonales}}\right] = \\
&= R\cdot\left(\underbrace{I_1^2+I_2^2}_{\substack{\text{valores}\\ \text{eficaces}}}\right) = \boxed{P_1+P_2}
\end{aligned}
$$

Principio de superposición y potencia: ejemplo

Teniendo en cuenta la propiedad de ortogonalidad, si en un circuito actúan **fuentes de continua** y **varias fuentes de alterna** de **distinta frecuencia** entre ellas:

- Potencia disipada en una **resistencia**:
$$P_R = R \cdot \left(I_{cc}^2 + I_1^2 + I_2^2 + ... + I_n^2\right)$$
- **Potencia entregada por fuente de tensión** de frecuencia ω_1:
$$P = E\, I_1 \, \cos(\theta_{i_1})$$
- **Potencia entregada por fuente de corriente** de frecuencia ω_2:
$$P = U_2\, I_g \, \cos(\theta_{u_2})$$

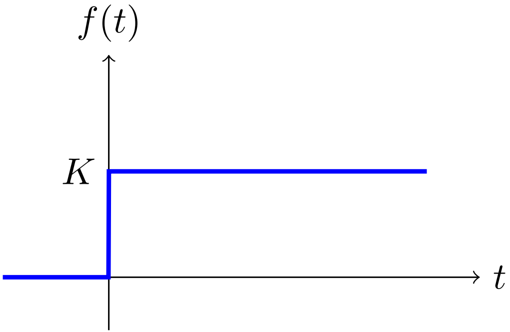
> **Potencia entregada**:
> solo actúa la componente de la intensidad/tensión que tiene **la misma frecuencia** que el generador de tensión/corriente

Formas de onda

- Cuando en un mismo circuito **conviven generadores** cuyas salidas (de tensión o de corriente) tiene **distintas forma de onda**, también puede aplicarse el Tª de **superposición** para resolverlo

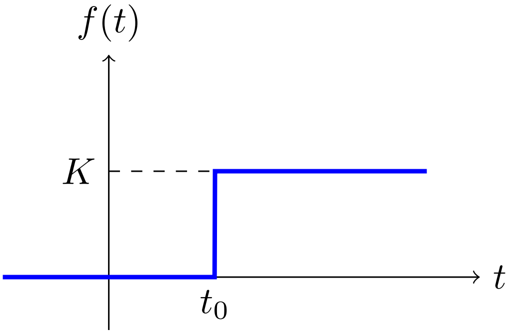
- A continuación se incluyen algunos ejemplos de formas de onda típicas

Escalón



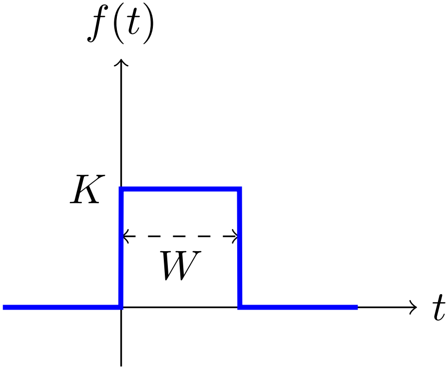
$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ K & t \geq 0 \end{cases}$$

Escalón desplazado



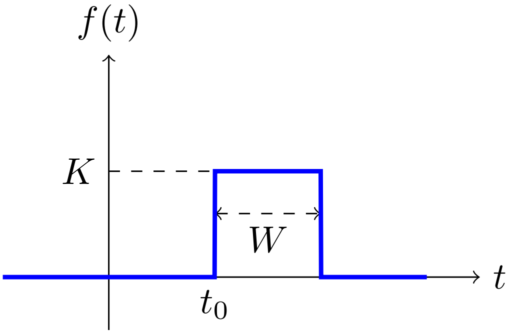
$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < t_0 \\ K & t \geq t_0 \end{cases}$$

Pulso



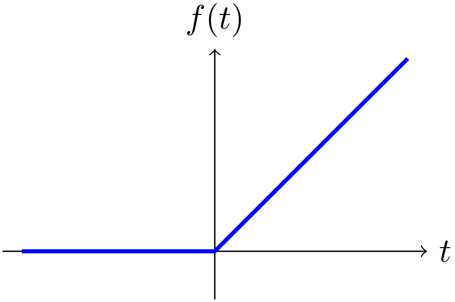
$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ K & 0 \leq t \leq W \\ 0 & t > W \end{cases}$$

Pulso desplazado



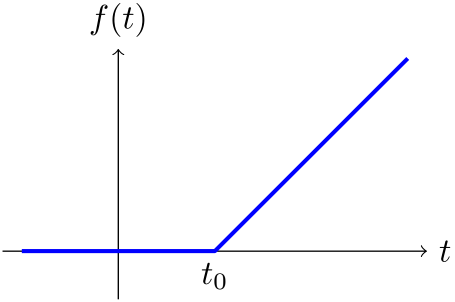
$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < t_0 \\ K & t_0 \leq t \leq t_0 + W \\ 0 & t > t_0 + W \end{cases}$$

Rampa



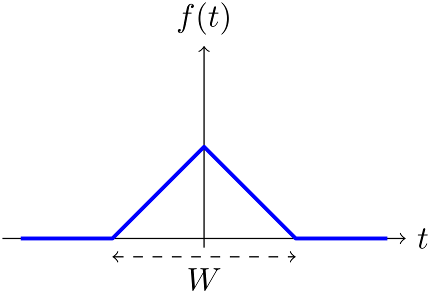
$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ m \cdot t & t \geq 0 \end{cases}$$

Rampa desplazada



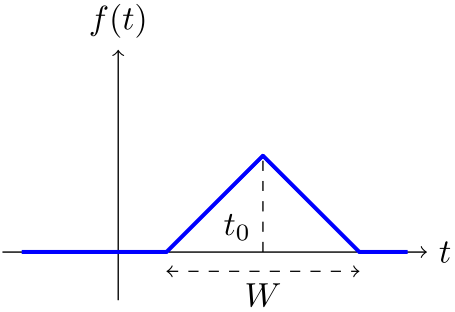
$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < t_0 \\ m \cdot (t - t_0) & t \geq t_0 \end{cases}$$

Triangular



$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < -W/2 \\ m \cdot (t + W/2) & -W/2 \leq t \leq 0 \\ -m \cdot (t - W/2) & 0 \leq t \leq W/2 \\ 0 & t > W/2 \end{cases}$$

Triangular desplazada

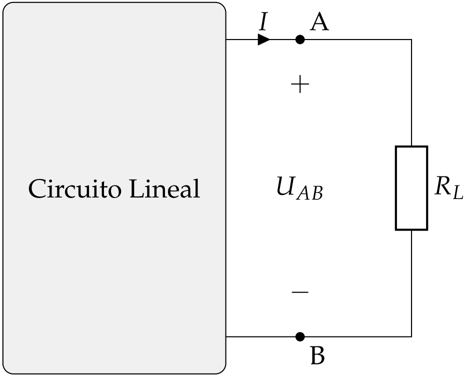


$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < t_0 - W/2 \\ m \cdot [t - (t_0 - W/2)] & t_0 - W/2 \leq t \leq t_0 \\ -m \cdot [t - (t_0 + W/2)] & t_0 < t \leq t_0 + W/2 \\ 0 & t > t_0 + W/2 \end{cases}$$

1. Circuitos lineales
2. Teoremas de Thévenin y Norton
3. Teorema de máxima transferencia de potencia

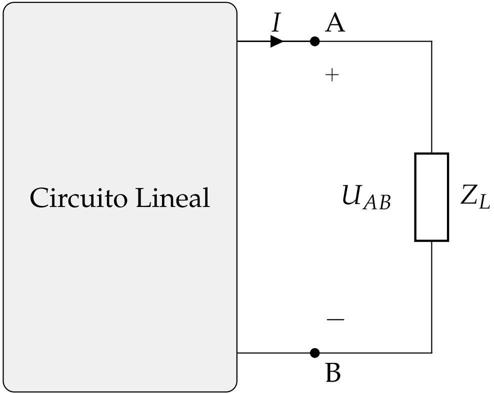
Teoremas de Thévenin y Norton

- Permiten transformar un circuito complejo en un equivalente **más simple**
- Útiles cuando solo nos interesa la **respuesta global de un circuito**, y no las intensidades o tensiones parciales

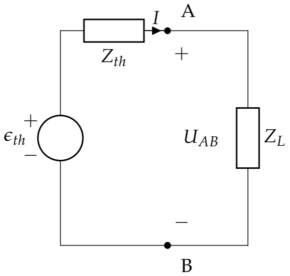


Teorema de Thévenin

Cualquier **red lineal** compuesta por elementos activos y pasivos **puede sustituirse**, desde el punto de vista de sus terminales externos A-B, por una **fuente de tensión** (generador de Thévenin, ϵ_{th}) en **serie** con una **impedancia** (impedancia de Thévenin, Z_{th})



Cálculo del equivalente de Thévenin



- Circuito abierto ($Z_L \to \infty, \quad U_{AB} = U_{oc}$)

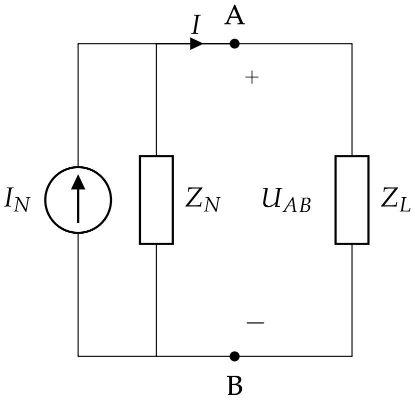
$$\boxed{\epsilon_{th} = U_{oc}} \qquad (\text{SC} \equiv \textit{short circuit}, \quad \text{OC} \equiv \textit{open circuit})$$

- Cortocircuito ($Z_L = 0, \quad I = I_{sc}$)

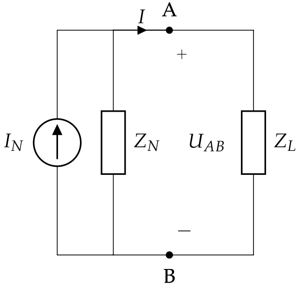
$$\boxed{Z_{th} = \frac{\epsilon_{th}}{I_{sc}} = \frac{U_{oc}}{I_{sc}}}$$

Teorema de Norton

Cualquier **red lineal** compuesta por elementos activos y pasivos **puede sustituirse**, desde el punto de vista de sus terminales externos A-B, por una **fuente de corriente** (generador de Norton, I_N) en **paralelo** con una **impedancia** (impedancia de Norton, Z_N)



Cálculo del equivalente de Norton



- Cortocircuito ($Z_L = 0, \quad I = I_{sc}$)

$$\boxed{I_N = I_{sc}} \qquad (\text{SC} \equiv \textit{short circuit}, \quad \text{OC} \equiv \textit{open circuit})$$

- Circuito abierto ($Z_L \to \infty, \quad U_{AB} = U_{oc}$)

$$\boxed{Z_N = \frac{U_{oc}}{I_N} = \frac{U_{oc}}{I_{sc}}}$$

Cálculo de impedancia Thévenin/Norton

- Siempre podemos calcular la impedancia Thévenin/Norton **calculando tanto** U_{oc} **como** I_{sc}, pero en ocasiones **no es sencillo** calcular ambas magnitudes

- Existe un método alternativo:
  - Si el circuito **NO** contiene **fuentes dependientes**:

    Se puede calcular **apagando** todos los **generadores** y obteniendo la impedancia equivalente

  - Si el circuito contiene **fuentes dependientes**:

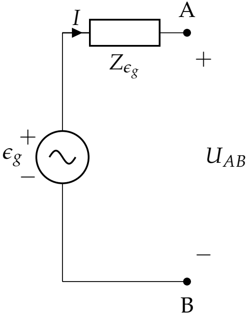
    Una **fuente dependiente no se puede apagar**, porque no tiene una excitación autónoma (depende de lo que está ocurriendo en otra parte del circuito)

    Es **necesario** conectar un **generador de prueba** a la salida del circuito y obtener la relación entre tensión y corriente de este generador

Recordatorio: equivalencia de fuentes

Sólo es posible establecer **equivalencia** entre **fuentes reales**

(la deducción es equivalente a la ya vista para corriente continua)

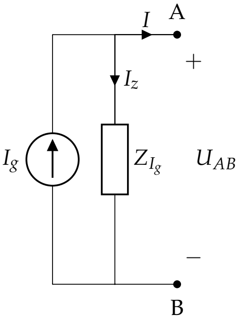


$$\overline{U}_{AB} = \overline{\epsilon}_g - \overline{Z}_{\epsilon_g} \cdot \overline{I}$$

$$\overline{Z}_g = \overline{Z}_{\epsilon_g} = \overline{Z}_{I_g}$$

$$\overline{\epsilon}_g = \overline{Z}_g \cdot \overline{I}_g$$

$$\overline{I}_g = \frac{\overline{\epsilon}_g}{\overline{Z}_g}$$



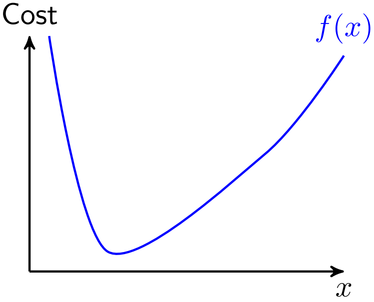
$$\overline{I} = \overline{I}_g - \frac{\overline{U}_{AB}}{\overline{Z}_{I_g}}$$

Interludio: *AC Optimal Power Flow*

- Objetivo: **optimizar** el coste operación de una **red eléctrica**

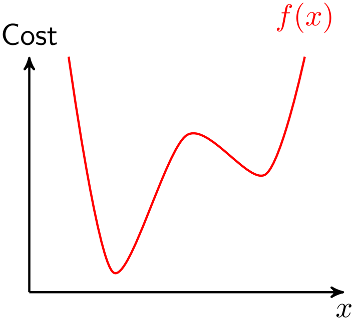
Millones de $ en premios

Convex Problem



One global minimum

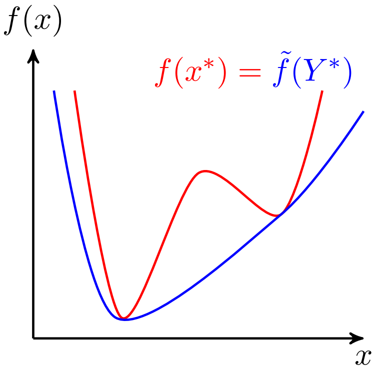
Non-convex problem



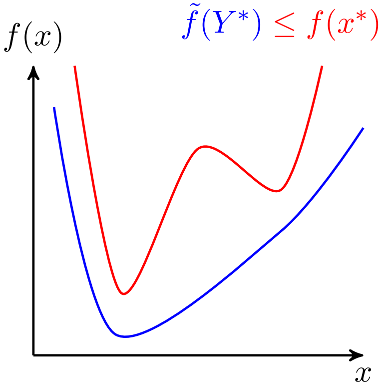
Several local minima

Interludio: AC-OPF, *convex relaxation*

- Para **minimizar** una función **no convexa**, una opción $\rightarrow$ *relajación* convexa



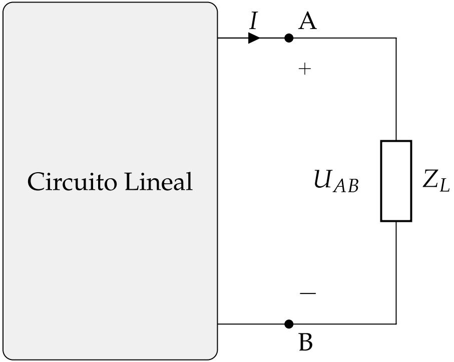
Zero relaxation gap



Non-zero relaxation gap

Máxima transferencia de potencia

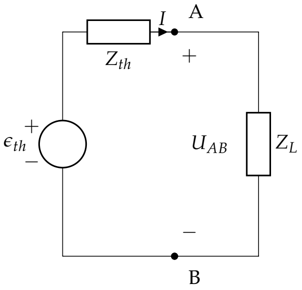
¿Qué impedancia $\overline{Z}_L$ hay que conectar en los terminales A-B para que el circuito entregue la **máxima potencia posible**?



Se aplica el **equivalente de Thévenin** (siguiente diapositiva)

Máxima transferencia de potencia: ecuaciones

Calculamos la **potencia activa en la impedancia** de carga $\overline{Z}_L$:



$$\overline{Z}_{th} = R_{th} + jX_{th}$$

$$\overline{Z}_L = R_L + jX_L$$

$$\bar{I} = \frac{\bar{\epsilon}_{th}}{\overline{Z}_{th} + \overline{Z}_L} \rightarrow |\bar{I}| = \frac{\epsilon_{th}}{|\overline{Z}_{th} + \overline{Z}_L|}$$

$$P_L = I^2 \cdot R_L$$

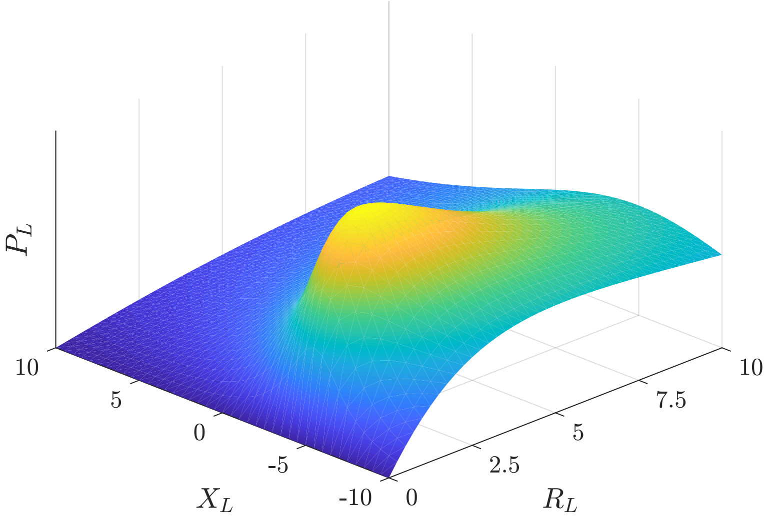
$$\boxed{P_L = \frac{\epsilon_{th}^2}{|\overline{Z}_{th} + \overline{Z}_L|^2} \cdot R_L}$$

Las **condiciones** de **máximo** son:

$$\boxed{\frac{\partial P_L}{\partial X_L} = 0\,, \qquad \frac{\partial P_L}{\partial R_L} = 0}$$

Máxima transferencia de potencia: ejemplo gráfico

Ejemplo para $R_{th} = 1{,}25\,\Omega$ y $X_{th} = 5\,\Omega$:



Máxima transferencia de potencia: reactancia

A partir de la expresión de potencia en la carga…

$$P_L = \frac{\epsilon_{th}^2}{|\overline{Z}_{th} + \overline{Z}_L|^2} \cdot R_L$$

…calculamos la derivada parcial respecto de la reactancia:

$$\frac{\partial P_L}{\partial X_L} \overset{\substack{\text{regla de} \\ \text{la cadena} \\ \downarrow}}{=} \epsilon_{th}^2 \cdot R_L \cdot \left[\frac{-1}{[(R_L + R_{th})^2 + (X_L + X_{th})^2]^2} \cdot 2 \cdot (X_L + X_{th}) \right]$$

Aplicamos la **condición de máximo** y obtenemos un resultado parcial:

$$\frac{\partial P_L}{\partial X_L} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{X_L = -X_{th}}$$

Máxima transferencia de potencia: resistencia

Simplificamos la expresión de la potencia teniendo en cuenta el resultado anterior ($X_L = -X_{th}$):

$$P_L = \frac{\epsilon_{th}^2}{(R_{th} + R_L)^2} \cdot R_L$$

Calculamos la derivada parcial respecto de la resistencia:

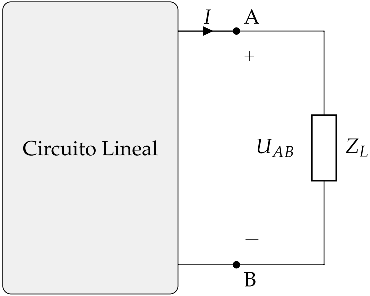
$$\frac{\partial P_L}{\partial R_L} \overset{\substack{\text{derivada de} \\ \text{un producto} \\ \downarrow}}{=} \epsilon_{th}^2 \cdot \left[\frac{1}{(R_L + R_{th})^2} - 2 \cdot \frac{R_L}{(R_L + R_{th})^3} \right] = \frac{\epsilon_{th}^2 \cdot (R_{th} - R_L)}{(R_L + R_{th})^3}$$

Nuevamente, aplicamos la **condición de máximo** y obtenemos la resistencia:

$$\frac{\partial P_L}{\partial R_L} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{R_L = R_{th}}$$

Impedancia de carga (o impedancias “adaptadas”)

Dado un circuito lineal (del que podemos calcular su equivalente de Thévenin)…

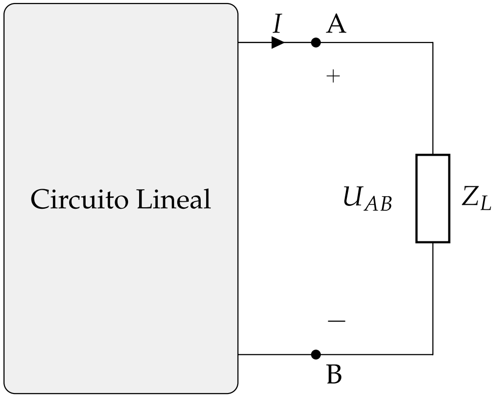


…la **impedancia de carga** que hay que conectar entre sus terminales A-B para obtener la máxima potencia disponible es:

$$\boxed{\overline{Z}_L = \overline{Z}_{th}^{*} = R_{th} - \mathrm{j}\, X_{th}}$$

Máxima potencia disponible

La **máxima potencia** que puede entregarse a la carga es:



$$\left.\begin{array}{c} \overline{Z}_L = \overline{Z}_{th}^* \\ P_L = \dfrac{\epsilon_{th}^2}{|\overline{Z}_{th} + \overline{Z}_L|^2} \cdot R_L \end{array}\right\} \rightarrow \boxed{P_L = \dfrac{\epsilon_{th}^2}{4 \cdot R_{th}}}$$

Importante

Esta expresión es **válida únicamente** para calcular la **máxima transferencia** de potencia

(no aplica para calcular la potencia disipada por una impedancia genérica $\overline{Z}_L$, únicamente aplica para $\overline{Z}_L = \overline{Z}_{th}^*$)