Análisis del Régimen Transitorio con Variables de Estado

Teoría de Circuitos III

Oscar Perpiñán Lamigueiro

Motivación

El comportamiento de un circuito puede ser descrito con ecuaciones diferenciales que pueden ser reescritas a un sistema de ecuaciones de primer orden*:

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= [a_{11}x_1(t) + \cdots + a_{1n}x_n(t)] + [b_{11}u_1(t) + \cdots + b_{1m}u_r(t)] \\
&\vdots \\
\dot{x}_n &= [a_{n1}x_1(t) + \cdots + a_{nn}x_n(t)] + [b_{n1}u_1(t) + \cdots + b_{nr}u_r(t)]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y_1(t) &= [c_{11}x_1(t) + \cdots + c_{1n}x_n(t)] + [d_{11}u_1(t) + \cdots + d_{1r}u_r(t)] \\
&\vdots \\
y_m(t) &= [c_{m1}x_1(t) + \cdots + c_{mn}x_n(t)] + [d_{m1}u_1(t) + \cdots + d_{mr}u_r(t)]
\end{aligned}
$$

*Notación:

$$\dot{x} = \frac{dx(t)}{dt}$$

Nomenclatura

- $x_1(t) \dots x_n(t)$ son las **n** variables del circuito, denominadas **variables de estado**, representadas como un vector $\mathbf{x}$ de dimensión n (**vector de estado**)
  - *Elegimos tensiones de condensadores y corrientes de bobinas.*

Nomenclatura

- $x_1(t) \ldots x_n(t)$ son las **n** variables del circuito, denominadas **variables de estado**, representadas como un vector **x** de dimensión n (**vector de estado**)
  - *Elegimos tensiones de condensadores y corrientes de bobinas.*
- $u_1(t) \ldots u_r(t)$ son las **r** entradas del circuito, representadas con un vector **u** de dimensión r (**vector de entrada**)

Nomenclatura

- $x_1(t) \ldots x_n(t)$ son las **n** variables del circuito, denominadas **variables de estado**, representadas como un vector **x** de dimensión n (**vector de estado**)
  - *Elegimos tensiones de condensadores y corrientes de bobinas.*
- $u_1(t) \ldots u_r(t)$ son las **r** entradas del circuito, representadas con un vector **u** de dimensión r (**vector de entrada**)
- $y_1(t) \ldots y_m(t)$ son las **m** salidas del circuito, representadas con un vector **y** de dimensión m (**vector de salida**)

Notación funcional y matricial

Ecuación de estado

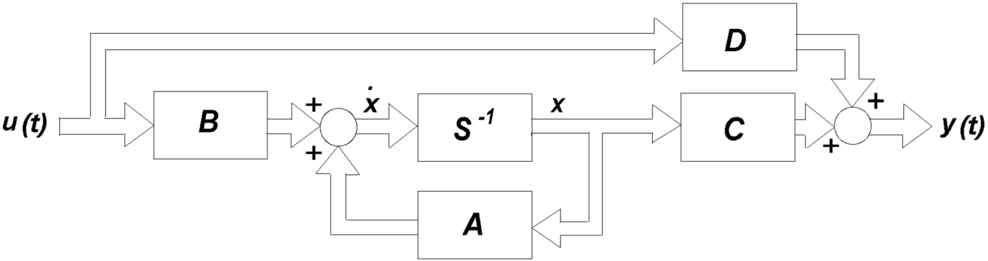
$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$$
$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$

Ecuación de salida[a]

[a] Frecuentemente la matriz $\mathbf{D}$ es nula, $\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}$.

$$\mathbf{y} = g(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$$
$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}$$

Diagrama de Bloques



$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{Cx} + \mathbf{Du}$$

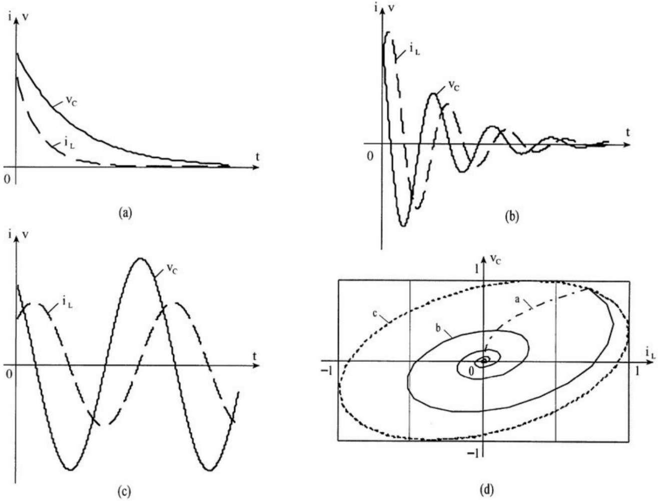
Ventajas del análisis con variables de estado

- Las ecuaciones diferenciales son de primer orden. Existen numerosas técnicas disponibles para resolverlas.
- Ecuaciones de estado y de salida se pueden programar fácilmente (*enfoque orientado a computación*).
- Teoría de Sistemas: amplio conocimiento matemático para determinar las propiedades de la solución.

Trayectoria

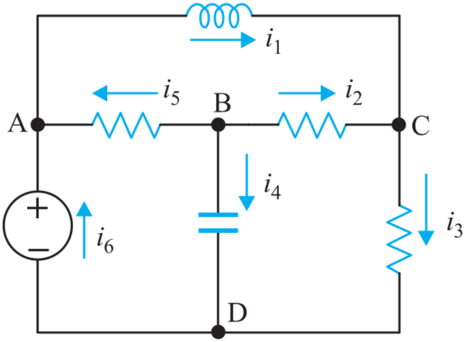
- Supongamos un circuito de segundo orden determinado por las variables $i_L(t)$ y $v_c(t)$.
- La **evolución con el tiempo** de estas dos variables (*intercambio y disipación de energía almacenada*) se puede representar como **coordenadas de puntos en un plano**.
- El plano $i_L - v_C$ es el **espacio de estados**. La curva que une estos puntos es la **trayectoria en el espacio de estados**.
- La curva comenzará en el punto de condiciones iniciales, $[i_L(0^+), v_C(0^+)]$, y finalizará en el régimen permanente $[i_L(\infty), v_C(\infty)]$.

Trayectoria

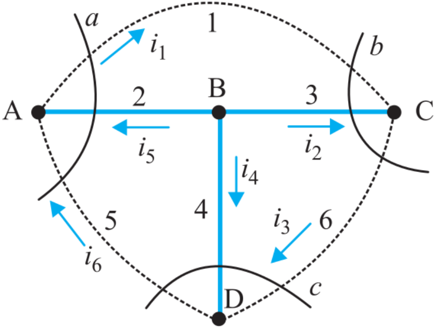


Definiciones

- **Grafo**: representación simplificada de un circuito eléctrico.



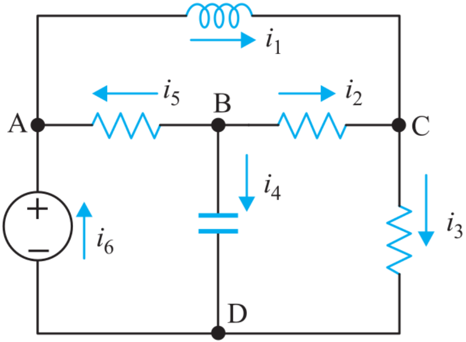
a) Circuito eléctrico



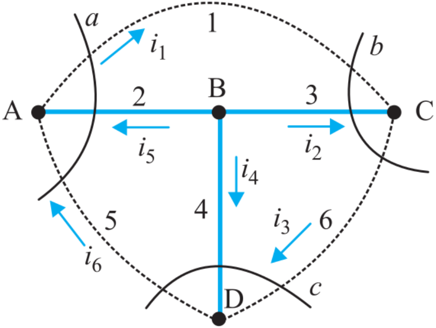
b) Grafo

Definiciones

- **Árbol**: conjunto de ramas que unen todos los nudos sin formar caminos cerrados.



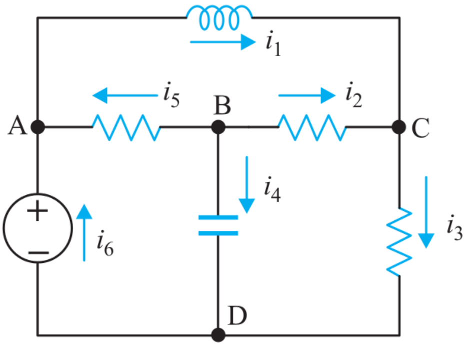
a) Circuito eléctrico



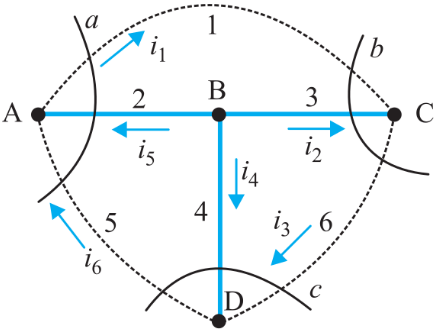
b) Grafo

Definiciones

- **Cuerdas** o **Eslabones**: ramas no incluidas en el árbol.
- **Lazos básicos**: lazos de un árbol con sólo un eslabón.



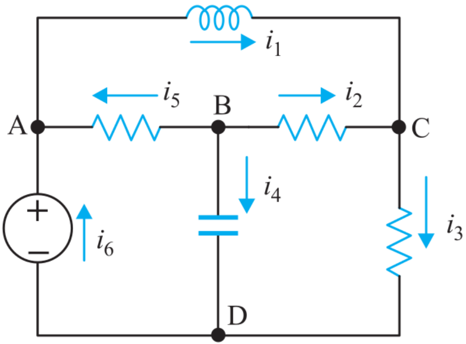
a) Circuito eléctrico



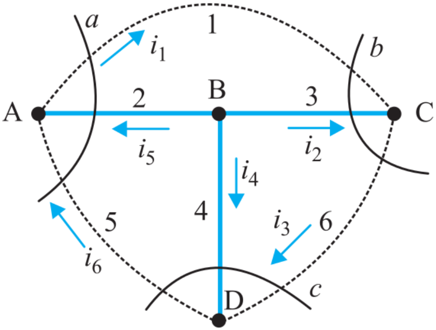
b) Grafo

Definiciones

- **Grupos de corte**: conjunto de ramas al que aplica la LKC.
- **Grupos de corte básicos**: grupo de corte que contiene sólo una rama del árbol.



a) Circuito eléctrico



b) Grafo

LKC y LKV

- Al aplicar la **LKC** en los **grupos de corte básico** se obtienen ecuaciones linealmente independientes.
- Al aplicar la **LKV** en los **lazos básicos** se obtienen ecuaciones linealmente independientes.

Árbol Propio

Fundamento

- Las variables de estado a elegir son $u_C(t)$ e $i_L(t)$.
- Las ecuaciones de condensadores evalúan corrientes (LKC en grupos de corte básico).

$$\frac{du_c}{dt} = \frac{i_c}{C}$$

- Las ecuaciones de bobinas evalúan tensiones (LKV en lazos básicos)

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{u_L}{L}$$

Árbol propio

Composición

- Todas las fuentes de tensión.
- Todos los condensadores.
- Resistencias (las que sean necesarias).
- Ninguna inductancia (situar en eslabones).
- Ninguna fuente de corriente (situar en eslabones).

Ecuación de estado en forma normal

1. Establecer el **árbol normal**.

Ecuación de estado en forma normal

1. Establecer el **árbol normal**.
2. **Variables de Estado**: asignar tensiones (*con polaridad*) a condensadores y corrientes (*con sentido*) a inductancias.

Ecuación de estado en forma normal

1. Establecer el **árbol normal**.
2. **Variables de Estado**: asignar tensiones (*con polaridad*) a condensadores y corrientes (*con sentido*) a inductancias.
3. **Variables adicionales**: tensiones y corrientes en resistencias según necesidad.

Ecuación de estado en forma normal

1. Establecer el **árbol normal**.
2. **Variables de Estado**: asignar tensiones (*con polaridad*) a condensadores y corrientes (*con sentido*) a inductancias.
3. **Variables adicionales**: tensiones y corrientes en resistencias según necesidad.
4. Una **ecuación para cada condensador** (usando LKC en el grupo de corte básico que corresponda).

Ecuación de estado en forma normal

1. Establecer el **árbol normal**.
2. **Variables de Estado**: asignar tensiones (*con polaridad*) a condensadores y corrientes (*con sentido*) a inductancias.
3. **Variables adicionales**: tensiones y corrientes en resistencias según necesidad.
4. Una **ecuación para cada condensador** (usando LKC en el grupo de corte básico que corresponda).
5. Una **ecuación para cada inductancia** (usando LKV en el lazo básico que corresponda).

Ecuación de estado en forma normal

1. Establecer el **árbol normal**.
2. **Variables de Estado**: asignar tensiones (*con polaridad*) a condensadores y corrientes (*con sentido*) a inductancias.
3. **Variables adicionales**: tensiones y corrientes en resistencias según necesidad.
4. Una **ecuación para cada condensador** (usando LKC en el grupo de corte básico que corresponda).
5. Una **ecuación para cada inductancia** (usando LKV en el lazo básico que corresponda).
6. **Ecuaciones para resistencias** para determinar variables adicionales (punto 3) en función de variables de estado.

Ecuación de estado en forma normal

1. Establecer el **árbol normal**.
2. **Variables de Estado**: asignar tensiones (*con polaridad*) a condensadores y corrientes (*con sentido*) a inductancias.
3. **Variables adicionales**: tensiones y corrientes en resistencias según necesidad.
4. Una **ecuación para cada condensador** (usando LKC en el grupo de corte básico que corresponda).
5. Una **ecuación para cada inductancia** (usando LKV en el lazo básico que corresponda).
6. **Ecuaciones para resistencias** para determinar variables adicionales (punto 3) en función de variables de estado.
7. Usar ecuaciones de punto 6 en puntos 4 y 5

Laplace

Ecuación de Estado

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$
$$\mathbf{s}\mathbf{X}(\mathbf{s}) - \mathbf{x}(0^-) = \mathbf{A}\mathbf{X}(\mathbf{s}) + \mathbf{B}\mathbf{U}(\mathbf{s})$$

Ecuación de Salida

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}$$
$$\mathbf{Y}(\mathbf{s}) = \mathbf{C}\mathbf{X}(\mathbf{s})$$

Ecuación de Estado con Laplace

Desarrollo

$$
\begin{aligned}
\mathbf{sX}(\mathbf{s}) - \mathbf{x}(0^-) &= \mathbf{AX}(\mathbf{s}) + \mathbf{BU}(\mathbf{s}) \\
\mathbf{sX}(\mathbf{s}) - \mathbf{AX}(\mathbf{s}) &= \mathbf{x}(0^-) + \mathbf{BU}(\mathbf{s}) \\
(\mathbf{sI} - \mathbf{A})\,\mathbf{X}(\mathbf{s}) &= \mathbf{x}(0^-) + \mathbf{BU}(\mathbf{s}) \\
\mathbf{X}(\mathbf{s}) &= (\mathbf{sI} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}(0^-) + \\
&\quad + (\mathbf{sI} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{BU}(\mathbf{s})
\end{aligned}
$$

Matriz $\mathbf{sI} - \mathbf{A}$

$$\mathbf{sI} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{s} - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \mathbf{s} - a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & \mathbf{s} - a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{sI} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{\mathrm{adj}(\mathbf{sI} - \mathbf{A})^T}{\det(\mathbf{sI} - \mathbf{A})}$$

Solución de la Ecuación de Estado

Solución

$$\mathbf{X}(\mathbf{s}) = (\mathbf{sI} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}(0^-) + (\mathbf{sI} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{BU}(\mathbf{s})$$

Respuesta a Entrada Cero

$$(\mathbf{sI} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}(0^-)$$

Respuesta a Estado Inicial Cero

$$(\mathbf{sI} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{BU}(\mathbf{s})$$

Función de Transferencia

Función de Transferencia

Suponiendo condiciones iniciales nulas:

$$\mathbf{X}(\mathbf{s}) = (\mathbf{sI} - \mathbf{A})^{-1}\,\mathbf{BU}(\mathbf{s})$$

$$\mathbf{Y}(\mathbf{s}) = \mathbf{CX}(\mathbf{s})$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{s}) = \frac{\mathbf{Y}(\mathbf{s})}{\mathbf{U}(\mathbf{s})} = \mathbf{C}\,(\mathbf{sI} - \mathbf{A})^{-1}\,\mathbf{B}$$

Polos del Sistema

$$(\mathbf{sI} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{\operatorname{adj}(\mathbf{sI} - \mathbf{A})^{T}}{\det(\mathbf{sI} - \mathbf{A})}$$

Los polos del sistema se calculan con:

$$|\mathbf{sI} - \mathbf{A}| = 0$$

Ejercicios

- FM: Ejemplo de aplicación 4.18
- HKD: Ejemplos 19.1, 19.2, 19.3
- Exámenes