Respuesta en Frecuencia

Teoría de Circuitos III

Oscar Perpiñán Lamigueiro

Introducción

- Hasta ahora hemos analizado circuitos alimentados por generadores con frecuencia constante.
- El análisis de la **respuesta en frecuencia** consiste en variar la frecuencia de alimentación y estudiar la respuesta.
- Este análisis se realiza en **régimen permanente** con señales sinusoidales.

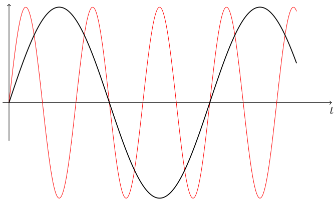
Respuesta en Frecuencia

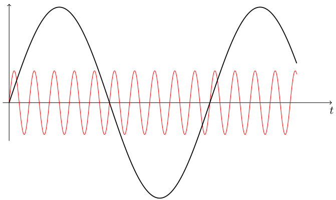
La respuesta en frecuencia de un circuito es la variación del comportamiento del circuito a los cambios de la frecuencia de alimentación.

Función de Transferencia

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{\mathbf{Y}(\omega)}{\mathbf{X}(\omega)}$$

$$\xrightarrow{\mathbf{X}(\omega)} \boxed{\mathbf{H}(\omega)} \xrightarrow{\mathbf{Y}(\omega)}$$





Funciones de Transferencia

- Ganancia de Tensión

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{\mathbf{V_o}(\omega)}{\mathbf{V_i}(\omega)}$$

- Ganancia de Corriente

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{\mathbf{I_o}(\omega)}{\mathbf{I_i}(\omega)}$$

- Impedancia de Transferencia

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{\mathbf{V_o}(\omega)}{\mathbf{I_i}(\omega)}$$

- Admitancia de Transferencia

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{\mathbf{I_o}(\omega)}{\mathbf{V_i}(\omega)}$$

La función de transferencia es un fasor

- Evaluamos la función de transferencia en el eje imaginario:

$$\mathbf{H}(\mathbf{s})\big|_{\mathbf{s}=j\omega} = \mathbf{H}(\omega)$$

- Dado que estamos en régimen permanente sinusoidal es **un fasor con módulo y ángulo**:

$$\mathbf{H}(\omega) = H\angle\phi$$

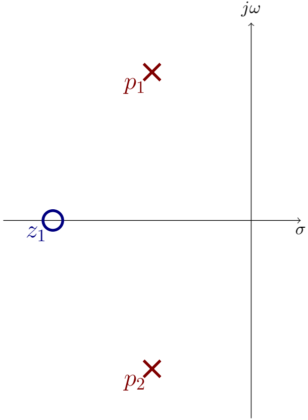
- Tanto el módulo como el ángulo **varían con la frecuencia**:

$$\mathbf{H}(\omega) \Rightarrow \begin{cases} |\mathbf{H}(\omega)| \\ \phi(\omega) \end{cases}$$

División de Polinomios: Polos y Ceros

$$\boxed{\mathbf{H}(\mathbf{s})|_{\mathbf{s}=j\omega} = \frac{\mathbf{N}(\mathbf{s})}{\mathbf{D}(\mathbf{s})}|_{\mathbf{s}=j\omega} = K\frac{(\mathbf{s}-z_1)(\mathbf{s}-z_2)\ldots(\mathbf{s}-z_m)}{(\mathbf{s}-p_1)(\mathbf{s}-p_2)\ldots(\mathbf{s}-p_n)}|_{\mathbf{s}=j\omega}}$$

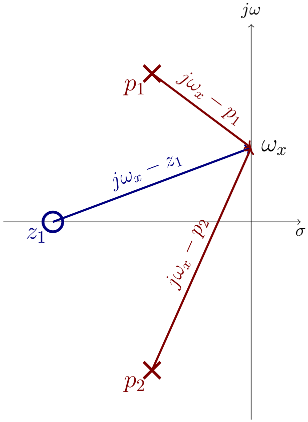
$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{j\omega - \mathbf{z_1}}{(j\omega - \mathbf{p_1})\cdot(j\omega - \mathbf{p_2})}$$



Interpretación Geométrica

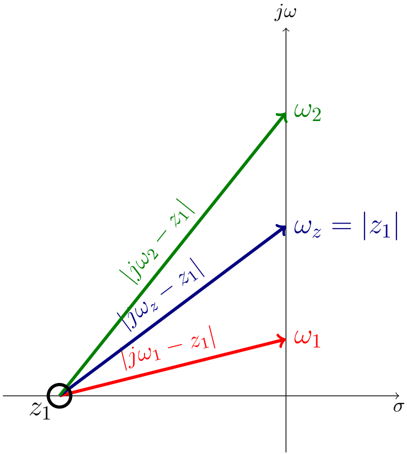
Cada uno de los factores de $\mathbf{H}(\omega)$ es un número complejo que conecta un cero/polo con el eje imaginario.

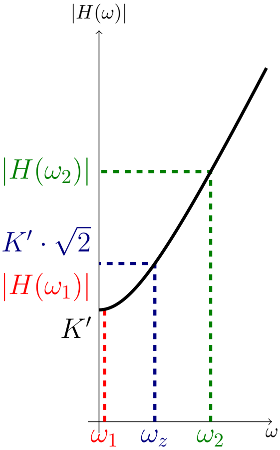
$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{j\omega - \mathbf{z_1}}{(j\omega - \mathbf{p_1}) \cdot (j\omega - \mathbf{p_2})}$$



Interpretación Geométrica: cero simple

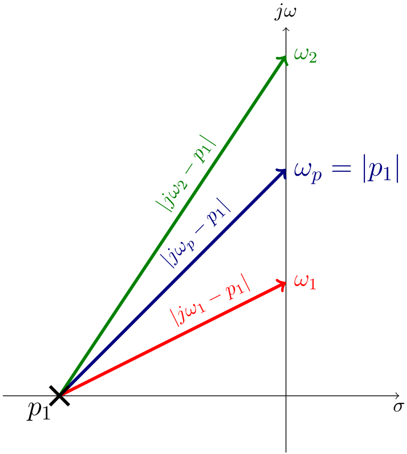
$$\mathbf{H}(\omega) = K \cdot (j\omega - \mathbf{z_1})$$

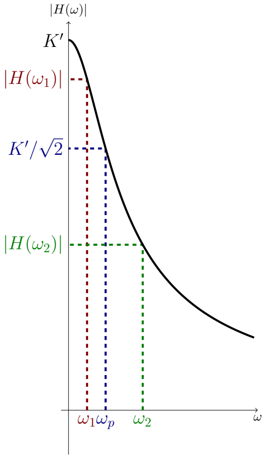




Interpretación Geométrica: polo simple

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{K}{j\omega - \mathbf{p_1}}$$





Forma normalizada o estándar

Para la construcción del diagrama de Bode es conveniente escribir la función en forma normalizada:

$$\mathbf{H}(\mathbf{s}) = K' \frac{(1+\mathbf{s}/\omega_{z1}) \cdot (1+\mathbf{s}/\omega_{z2}) \ldots (1+\mathbf{s}/\omega_{zm})}{(1+\mathbf{s}/\omega_{p1}) \cdot (1+\mathbf{s}/\omega_{p2}) \ldots (1+\mathbf{s}/\omega_{pn})}$$

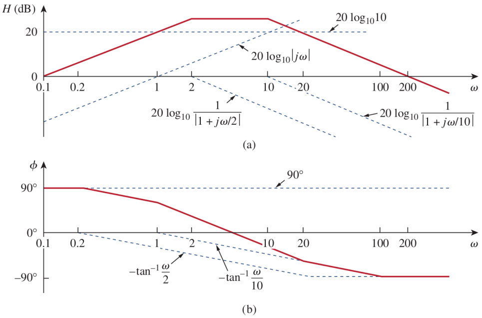
siendo ω_{zi} y ω_{pi} las pulsaciones de los ceros y polos, respectivamente.

Ejercicios Recomendados

- AS: Ejemplo 14.2.
- Exámenes:
  - Feb 2004 (a), Jun 2013 (a)
  - Sep 2007 (a), Feb 2005 (a), Feb 2010 (a)
  - Nov 2014 (a), Sep 2005 (a), Sep 2006 (a).

Introducción

- Un diagrama de Bode representa de forma **aproximada** la magnitud y la fase de la función de transferencia.
- Son **gráficos semilogarítmicos**:
  - Magnitud en **decibelios** frente al logaritmo de la frecuencia/pulsación.
  - Fase en radianes/grados frente al logaritmo de la frecuencia/pulsación.



Repaso de logaritmos

Propiedades

$$\log(P_1 \cdot P_2) = \log P_1 + \log P_2$$
$$\log \frac{P_1}{P_2} = \log P_1 - \log P_2$$
$$\log P^n = n \cdot \log P$$

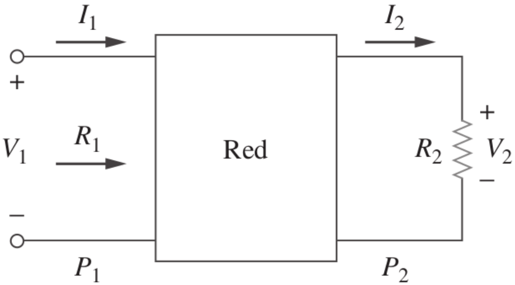
Valores útiles

$$\log 1 = 0 \qquad \log 2 = 0.30103$$
$$\log 10 = 1 \qquad \log \tfrac{1}{2} = -0.30103$$

Decibelio

El **decibelio** (dB) se emplea para medir la ganancia de potencia o la ratio de dos niveles de potencia:

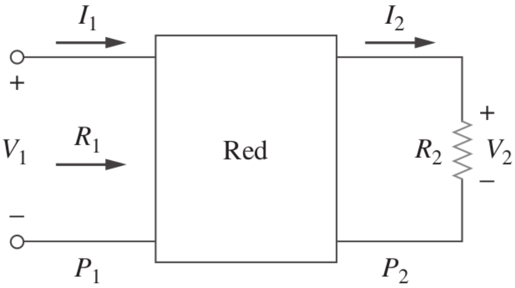
$$G_{dB} = 10 \log G = 10 \log \frac{P_2}{P_1}$$



Decibelio

Suponiendo $R_1 = R_2$, también se emplea para medir la ganancia de tensión/corriente:

$$G_{dB} = 10 \log \frac{V_2^2}{V_1^2} = 20 \log \frac{V_2}{V_1}$$



Valores importantes

- Ganancia unidad

$$G = 1 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} P_1 = P_2 \\ \\ V_1 = V_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} G_{dB} = 10\log\frac{P_2}{P1} = 0\,\mathrm{dB} \\ \\ G_{dB} = 20\log\frac{V_2}{V1} = 0\,\mathrm{dB} \end{array} \right\}$$

- Potencia Mitad

$$P_2 = \frac{P_1}{2} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} G = \frac{1}{2} \\ \\ V_2 = \frac{V_1}{\sqrt{2}} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} G_{dB} = 10\log\frac{P_2}{P1} = -3\,\mathrm{dB} \\ \\ G_{dB} = 20\log\frac{V_2}{V_1} = -3\,\mathrm{dB} \end{array} \right\}$$

Construcción del Diagrama de Bode

- Reescribimos $\mathbf{H}(\mathbf{s})$ de forma normalizada

$$\mathbf{H}(\mathbf{s})|_{\mathbf{s}=j\omega} = K\frac{(1+\mathbf{s}/\omega_{z1})\cdot(1+\mathbf{s}/\omega_{z2})\ldots(1+\mathbf{s}/\omega_{zm})}{(1+\mathbf{s}/\omega_{p1})\cdot(1+\mathbf{s}/\omega_{p2})\ldots(1+\mathbf{s}/\omega_{pn})}$$

- Módulo

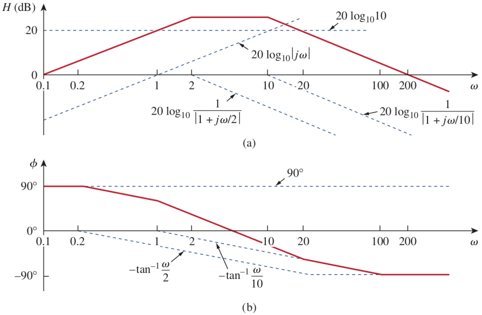
$$|\mathbf{H}(\omega)| = K\frac{|1+j\omega/\omega_{z1}|\cdot|1+j\omega/\omega_{z2}|\ldots|1+j\omega/\omega_{zm}|}{|1+j\omega/\omega_{p1}|\cdot|1+j\omega/\omega_{p2}|\ldots|1+j\omega/\omega_{pn}|}$$

- Ángulo

$$\begin{aligned}\phi(\omega) = &\ \mathrm{atan}(\omega/\omega_{z1}) + \mathrm{atan}(\omega/\omega_{z2}) + \ldots + \mathrm{atan}(\omega/\omega_{zm}) - \\ &- \left(\mathrm{atan}(\omega/\omega_{p1}) + \mathrm{atan}(\omega/\omega_{p2}) + \ldots + \mathrm{atan}(\omega/\omega_{pn})\right)\end{aligned}$$

Construcción del Diagrama de Bode

- Al aplicar logaritmos a la expresión de la amplitud **los productos se convierten en sumas**.
- La estrategia de construcción consiste en analizar la **contribución de cada cero/polo por separado** y **sumar** para obtener el resultado global.



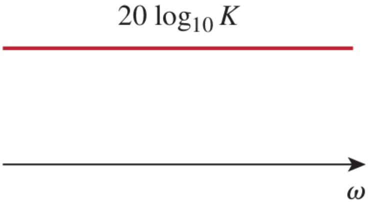
Construcción del Diagrama de Bode

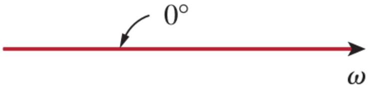
Posibilidades

- Término constante: K
- Cero/Polo en el origen: $j\omega$
- Cero/Polo simple: $1 + j\omega/\omega_c$
- Cero/Polo múltiple (*raíces reales repetidas*): $(1 + j\omega/\omega_c)^N$
- Cero/Polo cuadrático (*raíces complejas conjugadas*): $1 - (\omega/\omega_0)^2 + j2\zeta\omega/\omega_0$

Término Constante

$$\mathbf{H}(\omega) = K \Rightarrow \begin{cases} |\mathbf{H}(\omega)| = 20\log|K| \\ \phi(\omega) = \begin{cases} 0^\circ & si \quad K > 0 \\ 180^\circ & si \quad K < 0 \end{cases} \end{cases}$$





Cero en el origen*

$$\mathbf{H}(\omega) = j\omega \Rightarrow \begin{cases} |\mathbf{H}(\omega)| = 20\log\omega \\ \phi(\omega) = 90^\circ \end{cases}$$

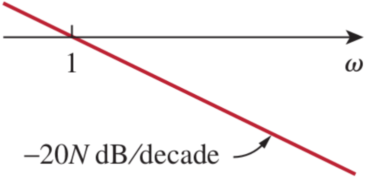
Década: rango de frecuencias comprendido entre ω_1 y $10 \cdot \omega_1$.

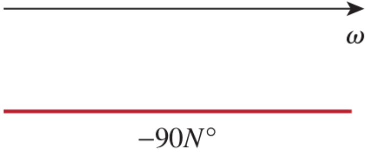
---

* **Atención**: el origen $\omega = 0$ no se representa en una escala logarítmica.

Polo en el origen

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{1}{j\omega} \Rightarrow \begin{cases} |\mathbf{H}(\omega)| = -20\log\omega \\ \phi(\omega) = -90^\circ \end{cases}$$



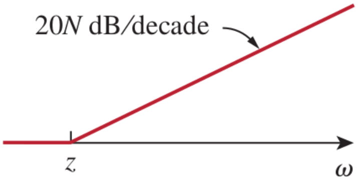


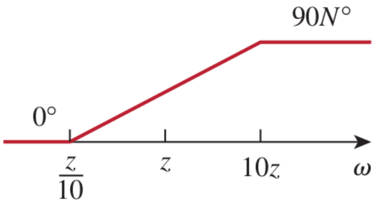
Cero simple

$$\mathbf{H}(\omega) = 1 + j\frac{\omega}{\omega_z} \Rightarrow \begin{cases} |\mathbf{H}(\omega)| = 20\log\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_z}\right)^2} \\ \phi(\omega) = \text{atan}(\frac{\omega}{\omega_z}) \end{cases}$$

$$|\mathbf{H}(\omega)| = \begin{cases} 20\log 1 = 0, & \omega \to 0 \\ 20\log\frac{\omega}{\omega_z}, & \omega \gg \omega_z \end{cases}$$

$$\phi(\omega) = \begin{cases} 0^\circ, & \omega \leq 0.1\omega_z \\ 45^\circ, & \omega = \omega_z \\ 90^\circ, & \omega \geq 10\omega_z \end{cases}$$



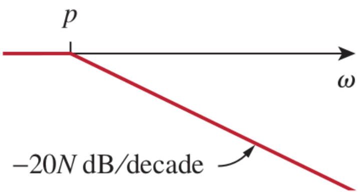


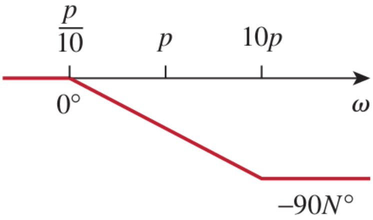
Polo simple

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_p}} \Rightarrow \begin{cases} |\mathbf{H}(\omega)| = -20\log\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^2} \\ \phi(\omega) = -\text{atan}\left(\frac{\omega}{\omega_p}\right) \end{cases}$$

$$|\mathbf{H}(\omega)| = \begin{cases} -20\log 1 = 0, & \omega \to 0 \\ -20\log\frac{\omega}{\omega_p}, & \omega \gg \omega_p \end{cases}$$

$$\phi(\omega) = \begin{cases} 0^\circ, & \omega \leq 0.1\omega_p \\ -45^\circ, & \omega = \omega_p \\ -90^\circ, & \omega \geq 10\omega_p \end{cases}$$





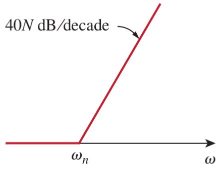
Cero cuadrático

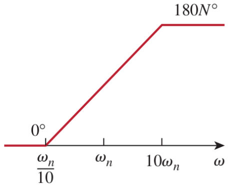
Sea $\mathbf{H}(\mathbf{s})|_{\mathbf{s}=j\omega} = \mathbf{s}^2 + 2\alpha\mathbf{s} + \omega_0^2$, con $\alpha < \omega_0$. Usando $\zeta = \alpha/\omega_0 < 1$ y normalizando:

$$\mathbf{H}(\omega) = 1 + j2\zeta\frac{\omega}{\omega_0} - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2$$

$$|\mathbf{H}(\omega)| = \begin{cases} 0, & \omega \to 0 \\ 40\log(\omega/\omega_0), & \omega \gg \omega_0 \end{cases}$$

$$\phi(\omega) = \begin{cases} 0^\circ, & \omega \leq 0.1\omega_0 \\ 90^\circ, & \omega = \omega_0 \\ 180^\circ, & \omega \geq 10\omega_0 \end{cases}$$



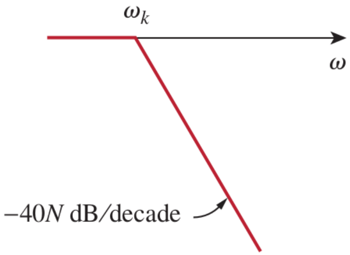


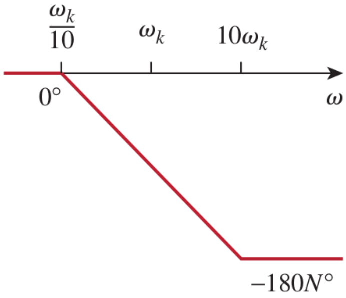
Polo cuadrático

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{1}{1 + j2\zeta\frac{\omega}{\omega_0} - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

$$|\mathbf{H}(\omega)| = \begin{cases} 0, & \omega \to 0 \\ -40\log(\omega/\omega_0), & \omega \gg \omega_0 \end{cases}$$

$$\phi(\omega) = \begin{cases} 0^\circ, & \omega \leq 0.1\omega_0 \\ -90^\circ, & \omega = \omega_0 \\ -180^\circ, & \omega \geq 10\omega_0 \end{cases}$$



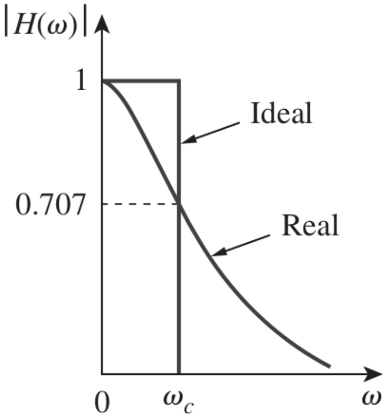


Ejercicios Recomendados

- AS: ejemplos 14.3, 14.4, 14.5, 14.6.
- Exámenes:
  - Feb 2004 (b), Jun 2013 (b)
  - Sep 2007 (b), Feb 2005 (b), Feb 2010 (b)
  - Nov 2014 (b), Sep 2005 (b), Sep 2006 (b).

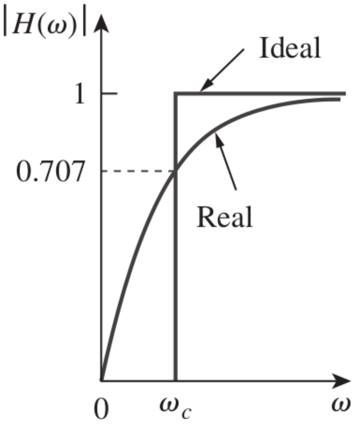
Filtro Paso Bajo

$$|H(0)| = 1$$
$$|H(\omega_c)| = 1/\sqrt{2}$$
$$|H(\infty)| = 0$$



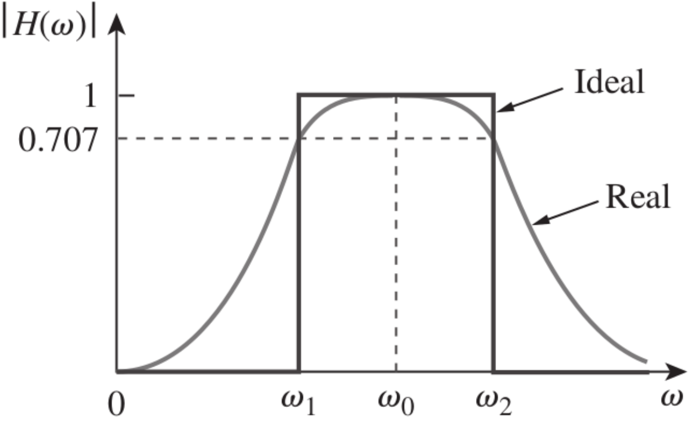
Filtro Paso Alto

$$|H(0)| = 0$$
$$|H(\omega_c)| = 1/\sqrt{2}$$
$$|H(\infty)| = 1$$



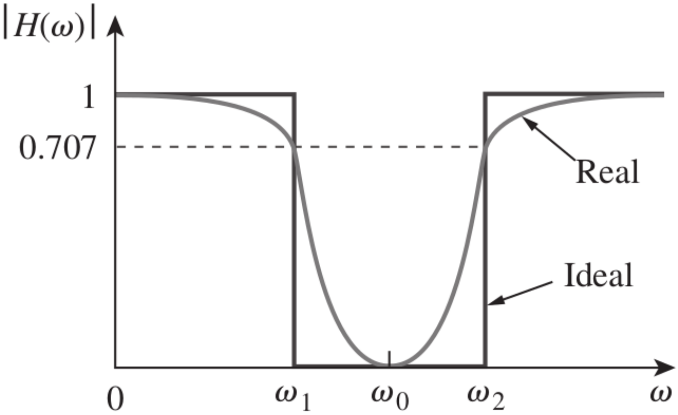
Filtro Paso Banda

$$|H(\omega < \omega_1)| = 0$$
$$|H(\omega_1 < \omega < \omega_2)| = 1$$
$$|H(\omega > \omega_2)| = 0$$

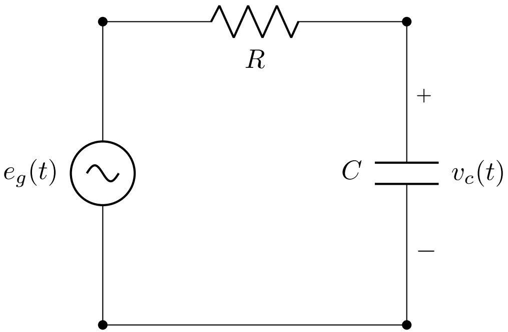


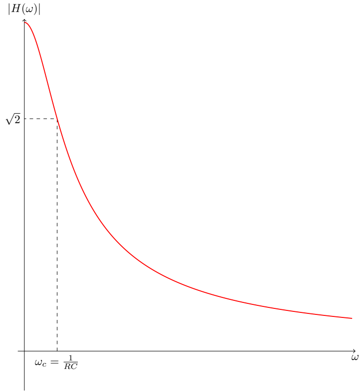
Filtro Banda Eliminada

$$|H(\omega < \omega_1)| = 1$$
$$|H(\omega_1 < \omega < \omega_2)| = 0$$
$$|H(\omega > \omega_2)| = 1$$



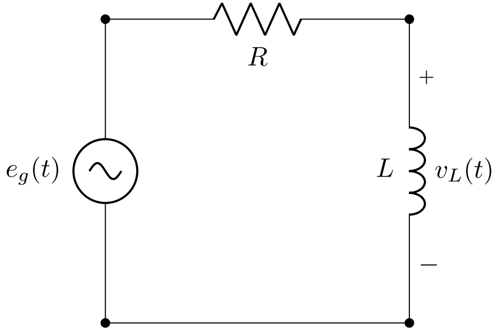
Ejemplo: circuito RC

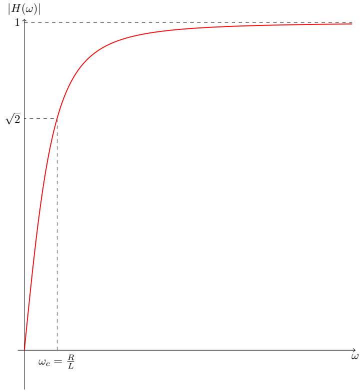




$$\mathbf{H(s)} = \frac{\mathbf{U_c(s)}}{\mathbf{E_g(s)}} \Rightarrow |\mathbf{H}(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_c)^2}}$$

Ejemplo: circuito RL

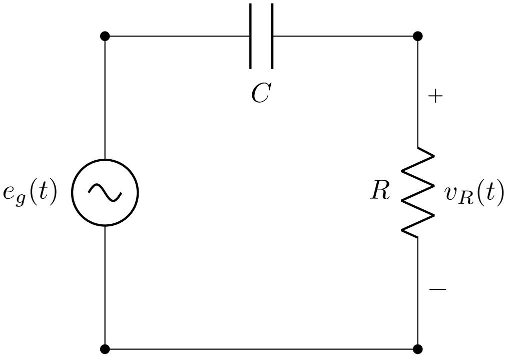




$$\mathbf{H(s)} = \frac{\mathbf{U_L(s)}}{\mathbf{E_g(s)}} \Rightarrow |\mathbf{H}(\omega)| = \frac{\omega/\omega_c}{\sqrt{1+(\omega/\omega_c)^2}}$$

Circuitos para practicar

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{\mathbf{U_R}(\omega)}{\mathbf{E_g}(\omega)}$$



$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{\mathbf{U_R}(\omega)}{\mathbf{E_g}(\omega)}$$