

Cuadripolos

Teoría de Circuitos III

Oscar Perpiñán Lamigueiro

① Introducción

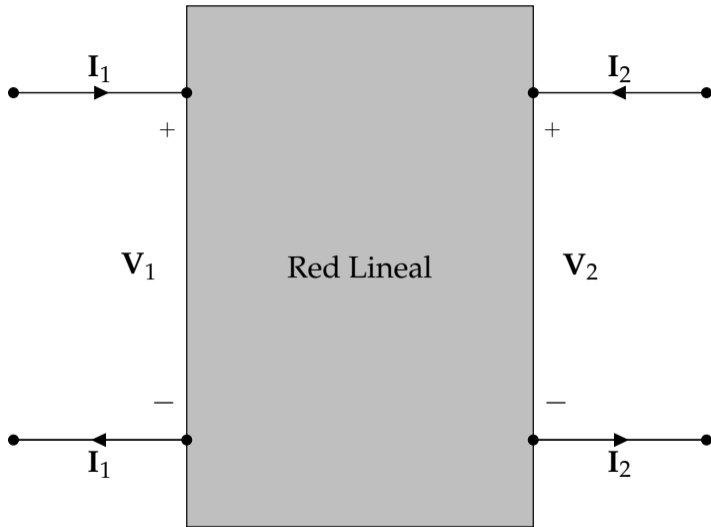
② Parámetros de Cuadripolos

③ Relación entre parámetros

④ Cuadripolos entre Dipolos Terminales

⑤ Asociación de Cuadripolos

Cuadripolo



Atención al sentido de las corrientes

Cuadripolos Recíprocos y Simétricos

- ▶ Un cuadripolo es **recíproco** si, al intercambiar la posición de las excitaciones, la respuesta en el puerto correspondiente no sufre cambios (teorema de reciprocidad).
- ▶ Un cuadripolo lineal (RLC) y **sin fuentes dependientes** es recíproco.
- ▶ Un **cuadripolo recíproco es simétrico** si se puede intercambiar la entrada con la salida (simetría física).

- ① Introducción
- ② **Parámetros de Cuadripolos**
- ③ Relación entre parámetros
- ④ Cuadripolos entre Dipolos Terminales
- ⑤ Asociación de Cuadripolos

① Introducción

② **Parámetros de Cuadripolos**

Parámetros de Impedancia

Parámetros de Admitancia

Parámetros Híbridos

Parámetros Híbridos Inversos

Parámetros de Transmisión

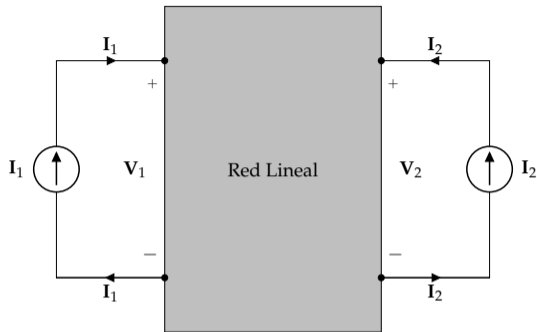
Parámetros de Transmisión Inversa

③ Relación entre parámetros

④ Cuadripolos entre Dipolos Terminales

⑤ Asociación de Cuadripolos

Definición



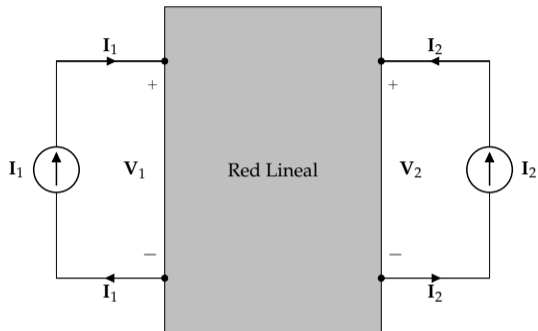
Mediante teorema de superposición:

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{z}_{11}\mathbf{I}_1 + \mathbf{z}_{12}\mathbf{I}_2$$

$$\mathbf{V}_2 = \mathbf{z}_{21}\mathbf{I}_1 + \mathbf{z}_{22}\mathbf{I}_2$$

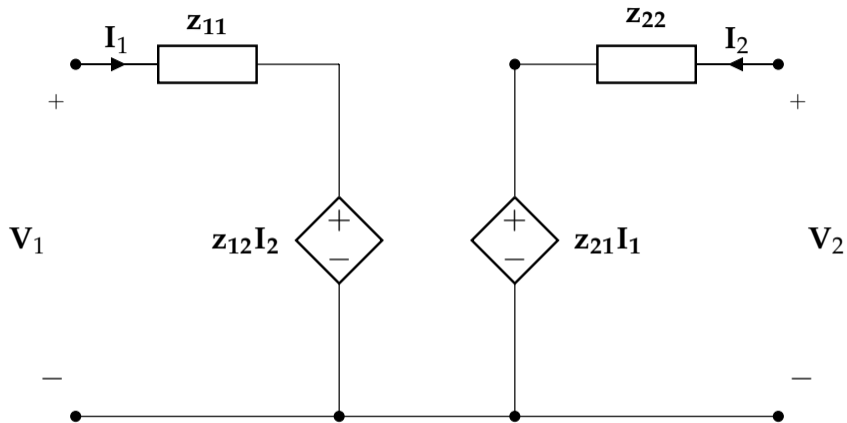
Las variables independientes (*generadores*) son \mathbf{I}_1 e \mathbf{I}_2 .

Expresión Matricial



$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{11} & \mathbf{z}_{12} \\ \mathbf{z}_{21} & \mathbf{z}_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix}$$

Circuito Equivalente



$$V_1 = z_{11}I_1 + z_{12}I_2$$

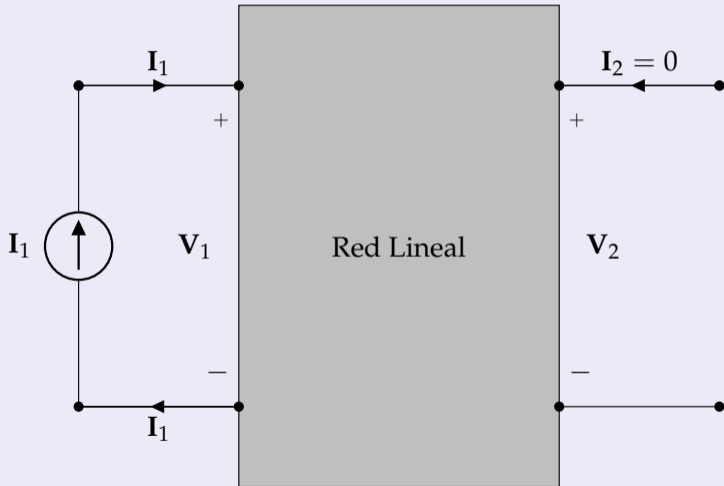
$$V_2 = z_{21}I_1 + z_{22}I_2$$

Cálculo de parámetros

Salida en abierto

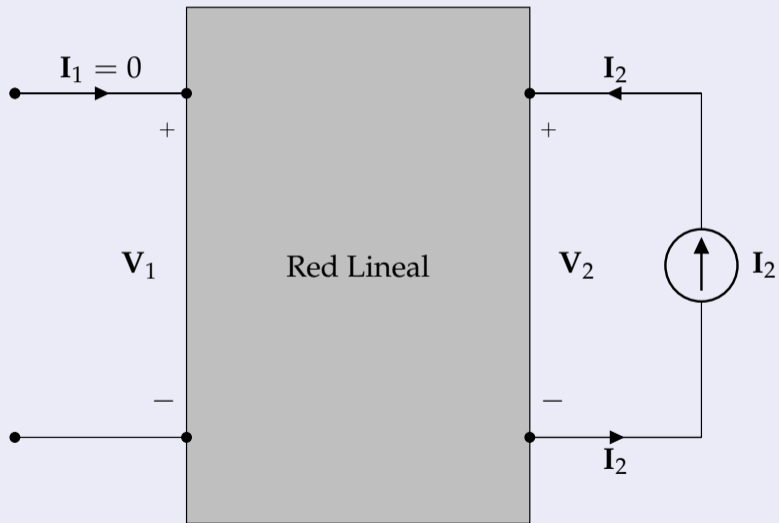
$$z_{11} = \frac{V_1}{I_1} \Big|_{I_2=0}$$

$$z_{21} = \frac{V_2}{I_1} \Big|_{I_2=0}$$



Cálculo de parámetros

Entrada en abierto

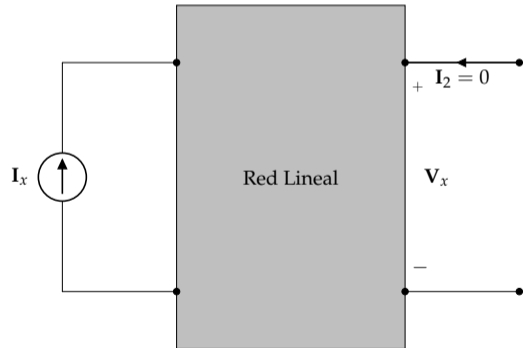
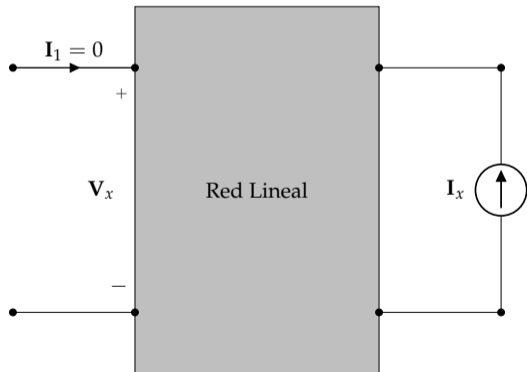


$$z_{12} = \left. \frac{V_1}{I_2} \right|_{I_1=0}$$

$$z_{22} = \left. \frac{V_2}{I_2} \right|_{I_1=0}$$

Reciprocidad

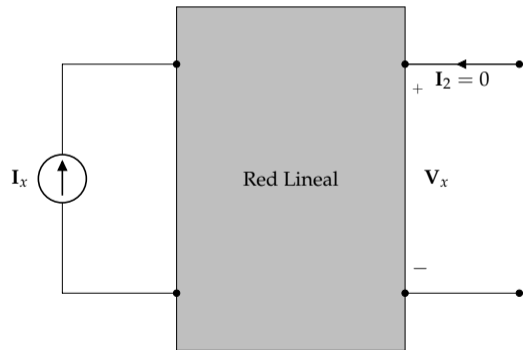
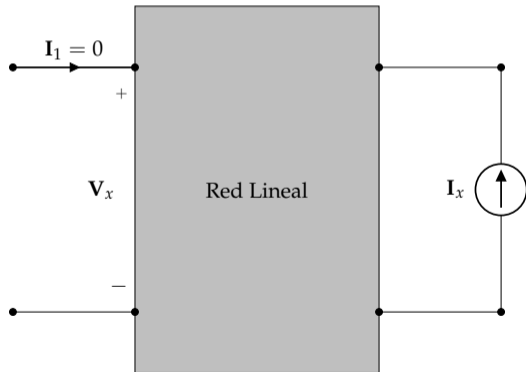
$$\mathbf{V}_1 \Big|_{\substack{\mathbf{I}_1 = 0 \\ \mathbf{I}_2 = \mathbf{I}_x}} = \mathbf{V}_2 \Big|_{\substack{\mathbf{I}_2 = 0 \\ \mathbf{I}_1 = \mathbf{I}_x}}$$



Relación entre parámetros

Las impedancias de transferencia son idénticas

$$\left. \begin{aligned} V_x &= z_{11}0 + z_{12}I_x \\ V_x &= z_{21}I_x + z_{22}0 \end{aligned} \right\} \rightarrow \boxed{z_{12} = z_{21}}$$

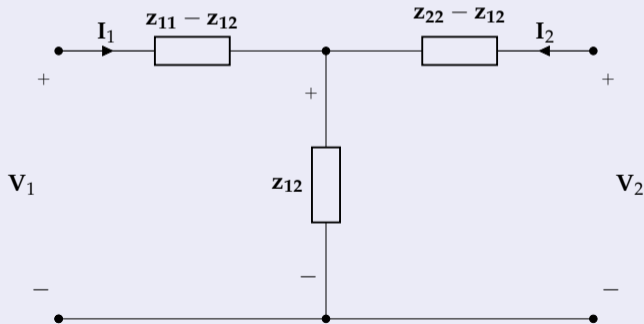


Circuito Equivalente en T

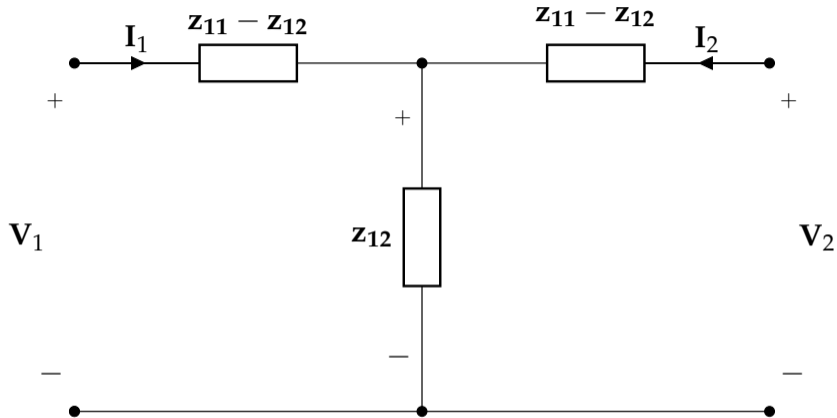
$$\boxed{z_{12} = z_{21}} \rightarrow \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{12} & z_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

Ejercicio

Demostrar que un cuadripolo recíproco es equivalente al circuito en T de la figura.



Cuadripolo Simétrico



$$\boxed{z_{11} = z_{22}} \rightarrow \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{12} & z_{11} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

No siempre hay parámetros Z

¿Cuáles son los parámetros Z ...

- ▶ de un transformador ideal?
- ▶ de una impedancia serie?

① Introducción

② **Parámetros de Cuadripolos**

Parámetros de Impedancia

Parámetros de Admitancia

Parámetros Híbridos

Parámetros Híbridos Inversos

Parámetros de Transmisión

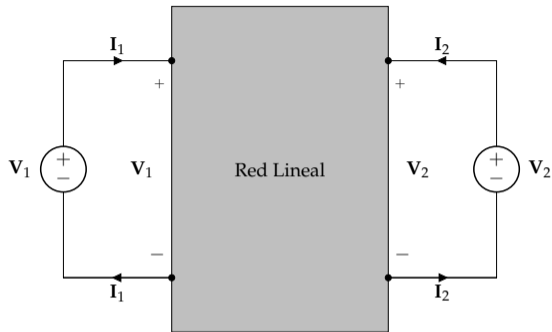
Parámetros de Transmisión Inversa

③ Relación entre parámetros

④ Cuadripolos entre Dipolos Terminales

⑤ Asociación de Cuadripolos

Definición



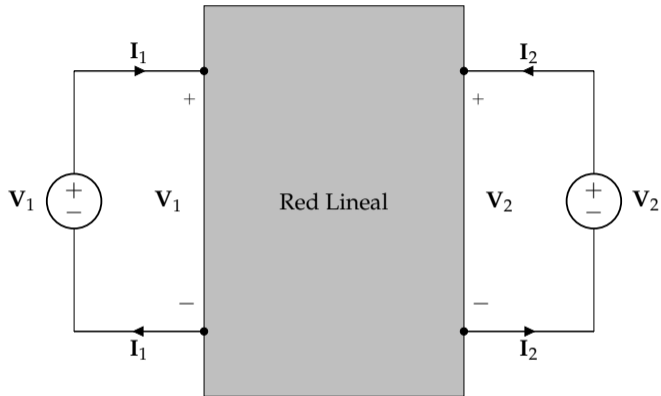
Mediante teorema de superposición:

$$\mathbf{I}_1 = \mathbf{y}_{11} \mathbf{V}_1 + \mathbf{y}_{12} \mathbf{V}_2$$

$$\mathbf{I}_2 = \mathbf{y}_{21} \mathbf{V}_1 + \mathbf{y}_{22} \mathbf{V}_2$$

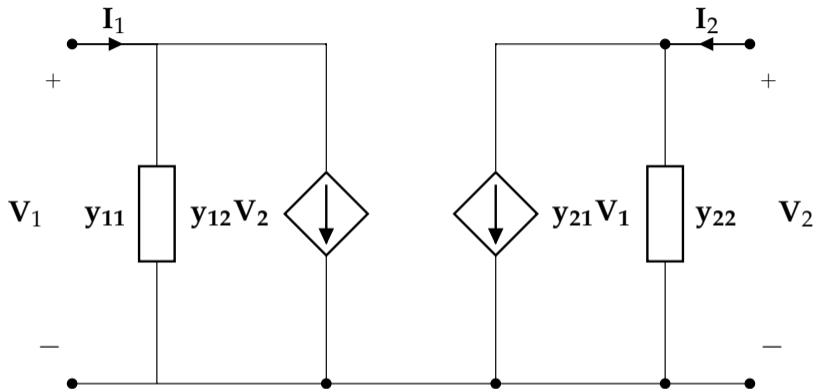
Las variables independientes (*generadores*) son \mathbf{V}_1 e \mathbf{V}_2 .

Expresión Matricial



$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{11} & \mathbf{y}_{12} \\ \mathbf{y}_{21} & \mathbf{y}_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix}$$

Circuito Equivalente



$$I_1 = y_{11} V_1 + y_{12} V_2$$

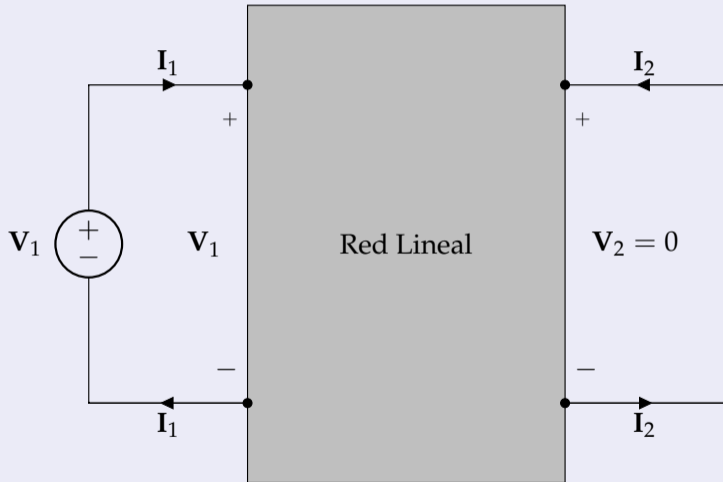
$$I_2 = y_{21} V_1 + y_{22} V_2$$

Cálculo de parámetros

Salida en cortocircuito

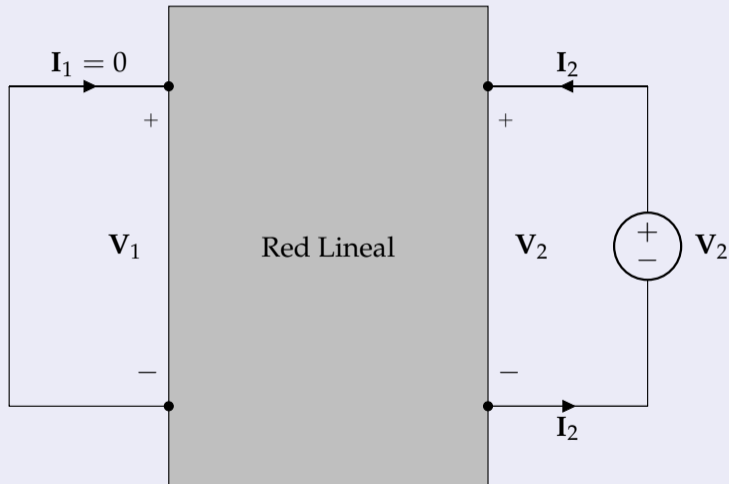
$$y_{11} = \frac{I_1}{V_1} \Big|_{V_2=0}$$

$$y_{21} = \frac{I_2}{V_1} \Big|_{V_2=0}$$



Cálculo de parámetros

Entrada en cortocircuito

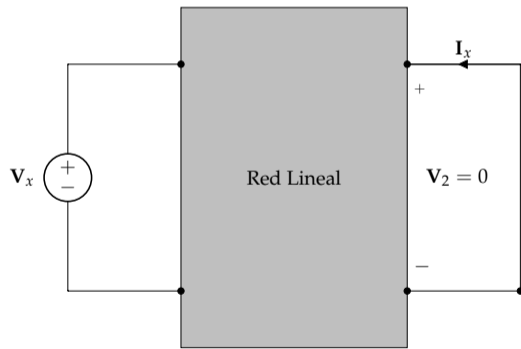
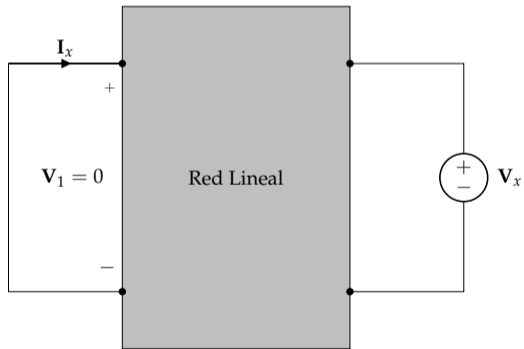


$$y_{12} = \frac{I_1}{V_2} \Big|_{V_1=0}$$

$$y_{22} = \frac{I_2}{V_2} \Big|_{V_1=0}$$

Reciprocidad

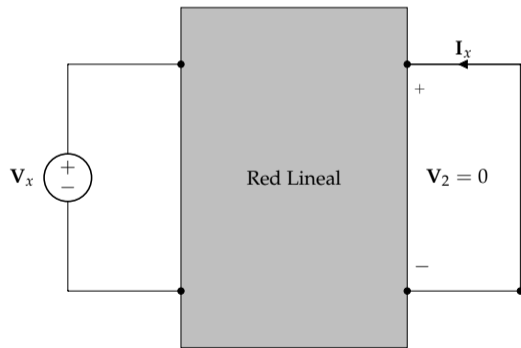
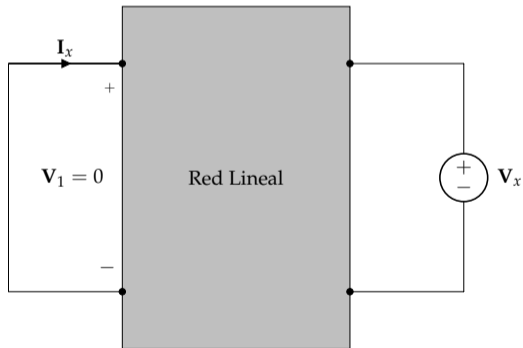
$$\mathbf{I}_1 \Big| \begin{matrix} \mathbf{V}_1 = 0 \\ \mathbf{V}_2 = \mathbf{V}_x \end{matrix} = \mathbf{I}_2 \Big| \begin{matrix} \mathbf{V}_2 = 0 \\ \mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_x \end{matrix}$$



Relación entre parámetros

Las admitancias de transferencia son idénticas

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{I}_x &= \mathbf{y}_{11}\mathbf{0} + \mathbf{y}_{12}\mathbf{V}_x \\ \mathbf{I}_x &= \mathbf{y}_{21}\mathbf{V}_x + \mathbf{y}_{22}\mathbf{0} \end{aligned} \right\} \rightarrow \boxed{\mathbf{y}_{12} = \mathbf{y}_{21}}$$

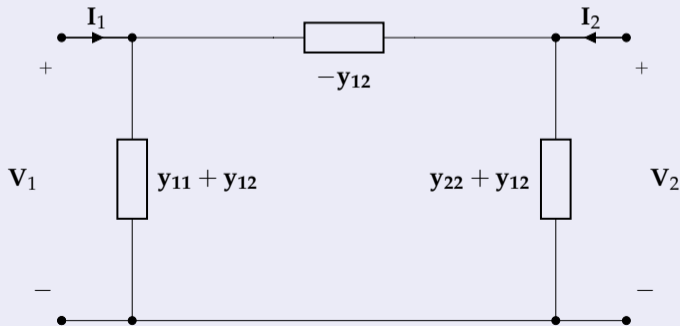


Circuito Equivalente en π

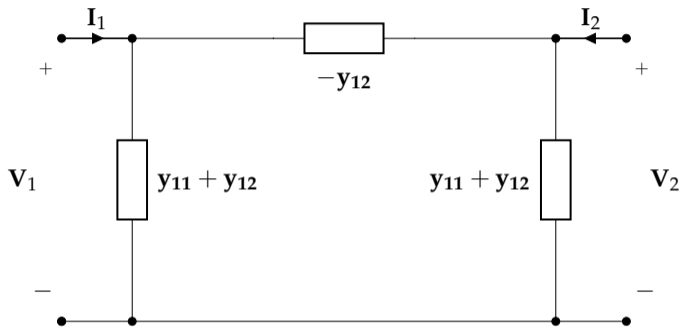
$$\boxed{y_{12} = y_{21}} \rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{12} & y_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix}$$

Ejercicio

Demostrar que un cuadripolo recíproco es equivalente al circuito en π de la figura.



Cuadripolo Simétrico



$$\boxed{y_{11} = y_{22}} \rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{11} & \mathbf{y}_{12} \\ \mathbf{y}_{12} & \mathbf{y}_{11} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix}$$

No siempre hay parámetros Y

¿Cuáles son los parámetros Y ...

- ▶ de un transformador ideal?
- ▶ de una impedancia paralelo?

① Introducción

② **Parámetros de Cuadripolos**

Parámetros de Impedancia

Parámetros de Admitancia

Parámetros Híbridos

Parámetros Híbridos Inversos

Parámetros de Transmisión

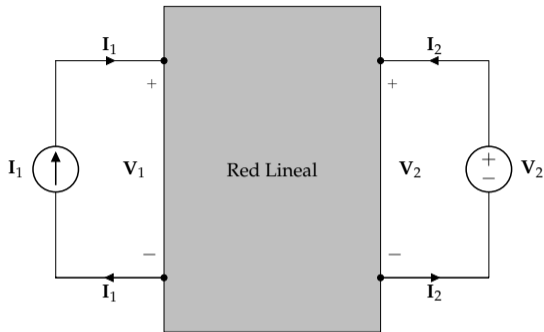
Parámetros de Transmisión Inversa

③ Relación entre parámetros

④ Cuadripolos entre Dipolos Terminales

⑤ Asociación de Cuadripolos

Definición



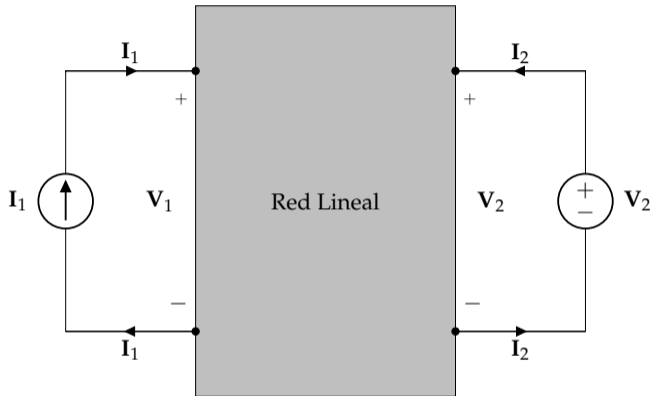
Mediante teorema de superposición:

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{h}_{11}\mathbf{I}_1 + \mathbf{h}_{12}\mathbf{V}_2$$

$$\mathbf{I}_2 = \mathbf{h}_{21}\mathbf{I}_1 + \mathbf{h}_{22}\mathbf{V}_2$$

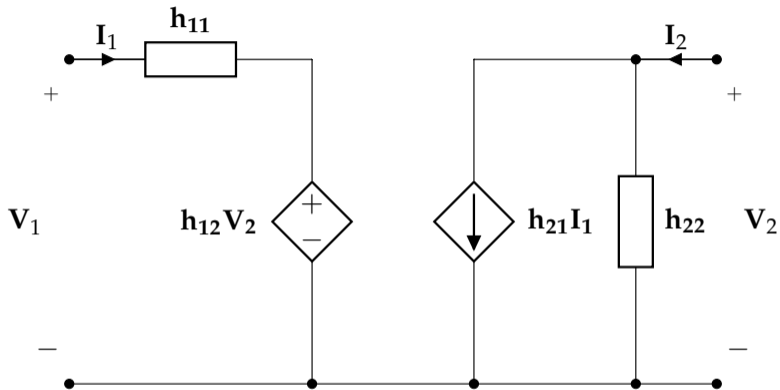
Las variables independientes (*generadores*) son \mathbf{I}_1 e \mathbf{V}_2 .

Expresión Matricial



$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_{11} & \mathbf{h}_{12} \\ \mathbf{h}_{21} & \mathbf{h}_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix}$$

Circuito Equivalente



$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{h}_{11}\mathbf{I}_1 + \mathbf{h}_{12}\mathbf{V}_2$$

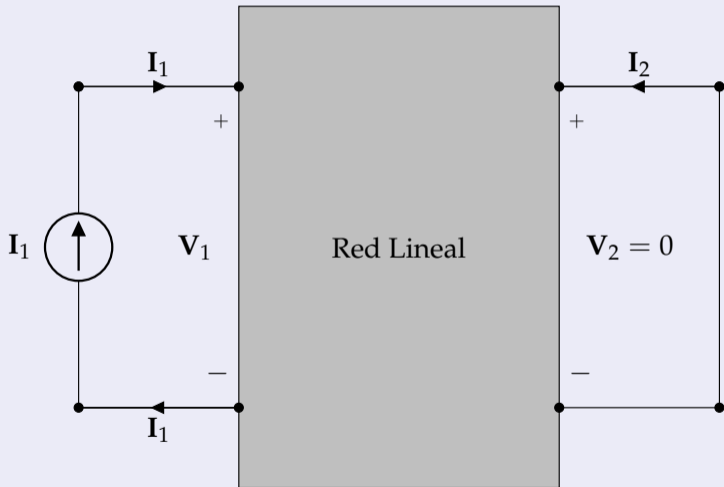
$$\mathbf{I}_2 = \mathbf{h}_{21}\mathbf{I}_1 + \mathbf{h}_{22}\mathbf{V}_2$$

Cálculo de parámetros

Salida en cortocircuito

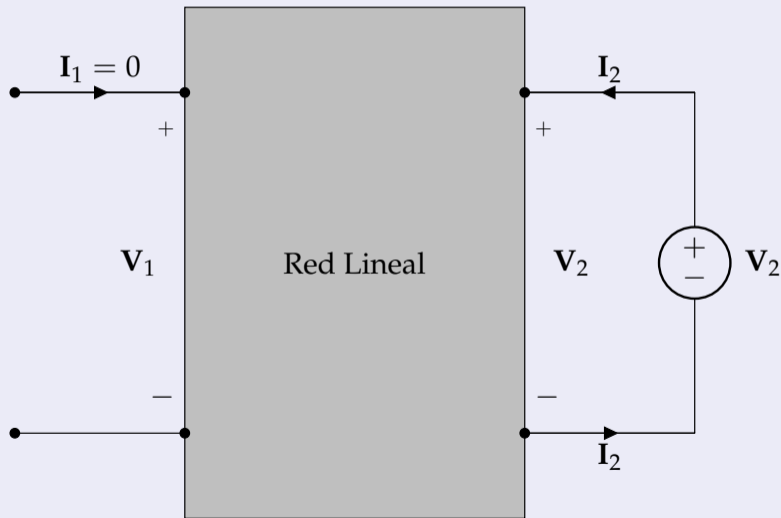
$$h_{11} = \frac{V_1}{I_1} \Big|_{V_2=0}$$

$$h_{21} = \frac{I_2}{I_1} \Big|_{V_2=0}$$



Cálculo de parámetros

Entrada en abierto



$$h_{12} = \left. \frac{V_1}{V_2} \right|_{I_1=0}$$

$$h_{22} = \left. \frac{I_2}{V_2} \right|_{I_1=0}$$

① Introducción

② **Parámetros de Cuadripolos**

Parámetros de Impedancia

Parámetros de Admitancia

Parámetros Híbridos

Parámetros Híbridos Inversos

Parámetros de Transmisión

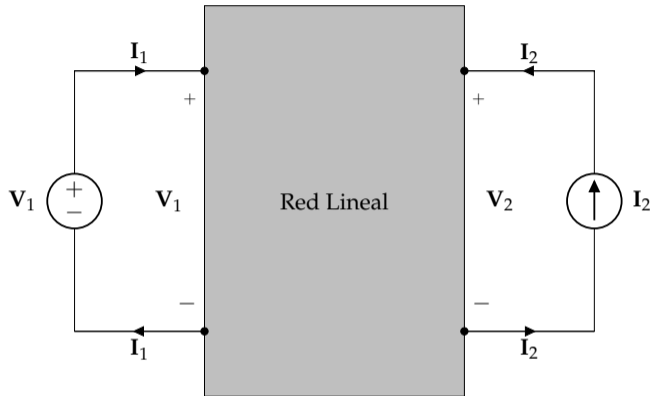
Parámetros de Transmisión Inversa

③ Relación entre parámetros

④ Cuadripolos entre Dipolos Terminales

⑤ Asociación de Cuadripolos

Definición

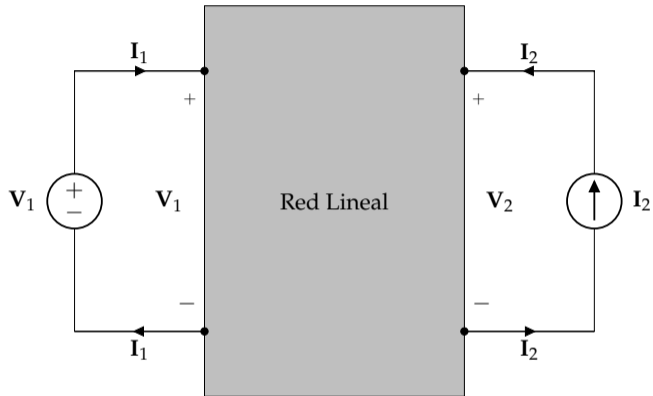


Mediante teorema de superposición:

$$\begin{aligned} I_1 &= g_{11} V_1 + g_{12} I_2 \\ V_2 &= g_{21} V_1 + g_{22} I_2 \end{aligned}$$

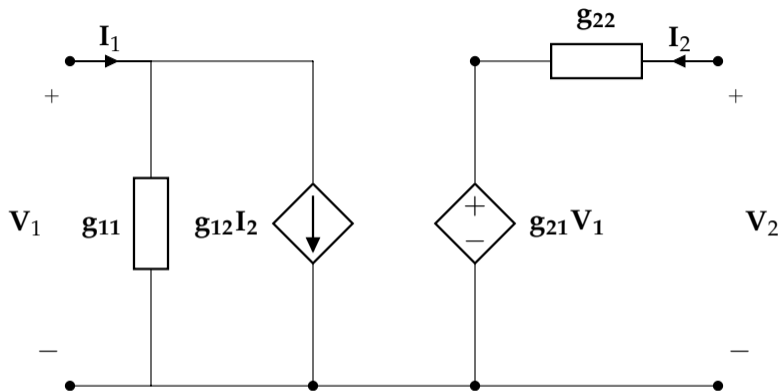
Las variables independientes (*generadores*) son V_1 e I_2 .

Expresión Matricial



$$\begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

Circuito Equivalente



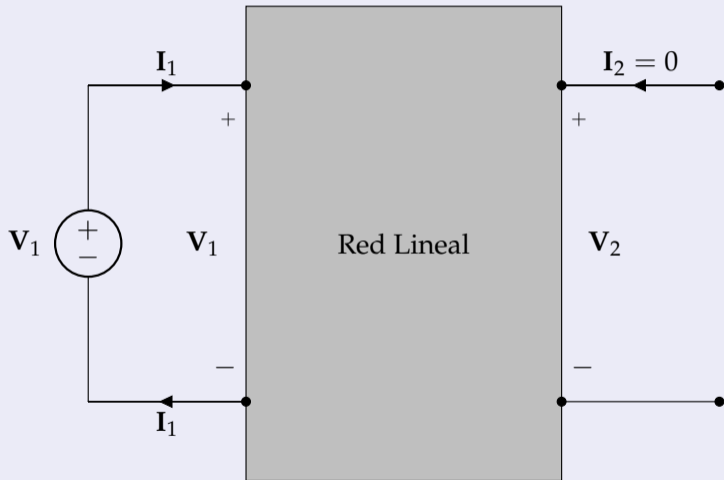
$$\begin{aligned} I_1 &= g_{11}V_1 + g_{12}I_2 \\ V_2 &= g_{21}V_1 + g_{22}I_2 \end{aligned}$$

Cálculo de parámetros

Salida en abierto

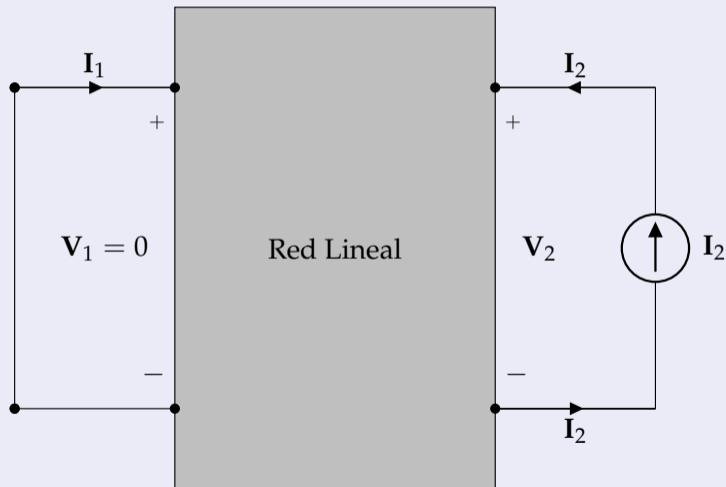
$$g_{11} = \frac{I_1}{V_1} \Big|_{I_2=0}$$

$$g_{21} = \frac{V_2}{V_1} \Big|_{I_2=0}$$



Cálculo de parámetros

Entrada en cortocircuito



$$g_{12} = \frac{I_1}{I_2} \Big|_{V_1=0}$$

$$g_{22} = \frac{V_2}{I_2} \Big|_{V_1=0}$$

① Introducción

② **Parámetros de Cuadripolos**

Parámetros de Impedancia

Parámetros de Admitancia

Parámetros Híbridos

Parámetros Híbridos Inversos

Parámetros de Transmisión

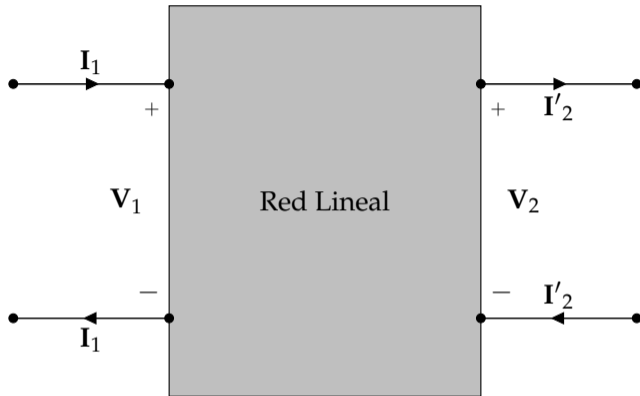
Parámetros de Transmisión Inversa

③ Relación entre parámetros

④ Cuadripolos entre Dipolos Terminales

⑤ Asociación de Cuadripolos

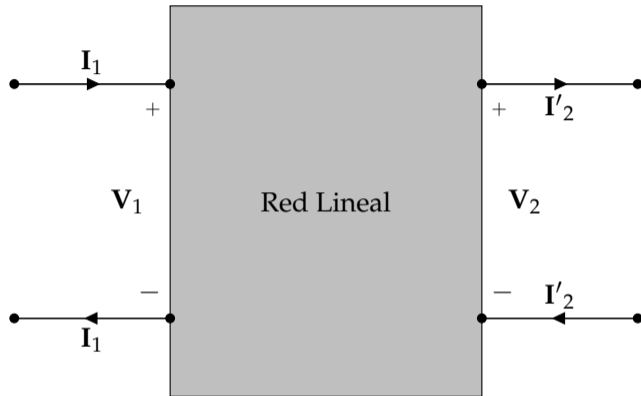
Definición



$$\begin{aligned}V_1 &= \mathbf{A}V_2 + \mathbf{B}I'_2 \\ I_1 &= \mathbf{C}V_2 + \mathbf{D}I'_2\end{aligned}$$

Atención al sentido de la corriente I'_2 . ($I'_2 = -I_2$).

Expresión Matricial



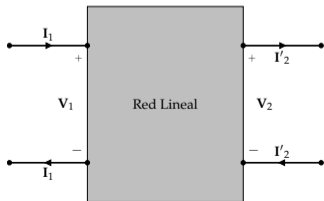
$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_2 \\ I'_2 \end{bmatrix}$$

Cálculo de parámetros

Se debe medir el inverso de cada parámetro, dado que la magnitud a medir y la excitación pertenecen al mismo puerto.

$$\frac{1}{\mathbf{A}} = \left. \frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{V}_1} \right|_{\mathbf{I}_2=0} \quad \frac{1}{\mathbf{B}} = \left. \frac{\mathbf{I}'_2}{\mathbf{V}_1} \right|_{\mathbf{V}_2=0}$$

$$\frac{1}{\mathbf{C}} = \left. \frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{I}_1} \right|_{\mathbf{I}_2=0} \quad \frac{1}{\mathbf{D}} = \left. \frac{\mathbf{I}'_2}{\mathbf{I}_1} \right|_{\mathbf{V}_2=0}$$



$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{A}\mathbf{V}_2 + \mathbf{B}\mathbf{I}'_2$$
$$\mathbf{I}_1 = \mathbf{C}\mathbf{V}_2 + \mathbf{D}\mathbf{I}'_2$$

① Introducción

② **Parámetros de Cuadripolos**

Parámetros de Impedancia

Parámetros de Admitancia

Parámetros Híbridos

Parámetros Híbridos Inversos

Parámetros de Transmisión

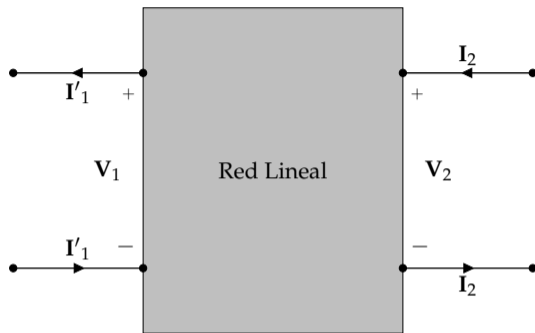
Parámetros de Transmisión Inversa

③ Relación entre parámetros

④ Cuadripolos entre Dipolos Terminales

⑤ Asociación de Cuadripolos

Definición

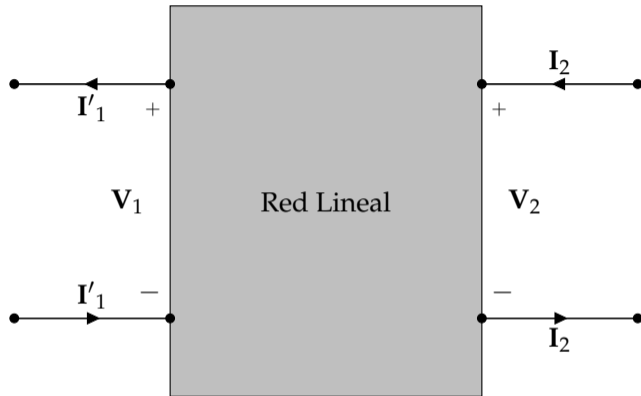


$$V_2 = aV_1 + bI'_1$$

$$I_2 = cV_1 + dI'_1$$

Atención al sentido de la corriente I'_1 ($I'_1 = -I_1$).

Expresión Matricial



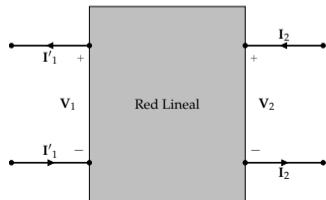
$$\begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ I'_1 \end{bmatrix}$$

Cálculo de parámetros

Se debe medir el inverso de cada parámetro, dado que la magnitud a medir y la excitación pertenecen al mismo puerto.

$$\frac{1}{\mathbf{a}} = \left. \frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{V}_2} \right|_{\mathbf{I}_1=0} \quad \frac{1}{\mathbf{b}} = \left. \frac{\mathbf{I}'_1}{\mathbf{V}_2} \right|_{\mathbf{V}_1=0}$$

$$\frac{1}{\mathbf{c}} = \left. \frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{I}_2} \right|_{\mathbf{I}_1=0} \quad \frac{1}{\mathbf{d}} = \left. \frac{\mathbf{I}'_1}{\mathbf{I}_2} \right|_{\mathbf{V}_1=0}$$



$$\mathbf{V}_2 = \mathbf{a}\mathbf{V}_1 + \mathbf{b}\mathbf{I}'_1$$
$$\mathbf{I}_2 = \mathbf{c}\mathbf{V}_1 + \mathbf{d}\mathbf{I}'_1$$

- ① Introducción
- ② Parámetros de Cuadripolos
- ③ Relación entre parámetros**
- ④ Cuadripolos entre Dipolos Terminales
- ⑤ Asociación de Cuadripolos

Impedancia y Admitancia

$$\left. \begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{11} & \mathbf{z}_{12} \\ \mathbf{z}_{21} & \mathbf{z}_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{11} & \mathbf{y}_{12} \\ \mathbf{y}_{21} & \mathbf{y}_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \rightarrow \boxed{[\mathbf{Z}] = [\mathbf{Y}]^{-1}}$$

Híbridos

$$\left. \begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{h}_{11} & \mathbf{h}_{12} \\ \mathbf{h}_{21} & \mathbf{h}_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{g}_{11} & \mathbf{g}_{12} \\ \mathbf{g}_{21} & \mathbf{g}_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \rightarrow \boxed{[\mathbf{H}] = [\mathbf{G}]^{-1}}$$

Transmisión

$$\left. \begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{I}_1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{V}_2 \\ \mathbf{I}'_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{V}_2 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \mathbf{c} & \mathbf{d} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{I}'_1 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \rightarrow \boxed{[\mathbf{T}] \neq [\mathbf{t}]^{-1}}$$

$$\boxed{\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a} & -\mathbf{b} \\ -\mathbf{c} & \mathbf{d} \end{bmatrix}^{-1}}$$

	z		y		h		g		T		t	
z	z_{11}	z_{12}	$\frac{y_{22}}{\Delta_y}$	$-\frac{y_{12}}{\Delta_y}$	$\frac{\Delta_h}{h_{22}}$	$\frac{h_{12}}{h_{22}}$	$\frac{1}{g_{11}}$	$-\frac{g_{12}}{g_{11}}$	$\frac{A}{C}$	$\frac{\Delta_T}{C}$	$\frac{d}{c}$	$\frac{1}{c}$
	z_{21}	z_{22}	$-\frac{y_{21}}{\Delta_y}$	$\frac{y_{11}}{\Delta_y}$	$-\frac{h_{21}}{h_{22}}$	$\frac{1}{h_{22}}$	$\frac{g_{21}}{g_{11}}$	$\frac{\Delta_g}{g_{11}}$	$\frac{1}{C}$	$\frac{D}{C}$	$\frac{\Delta_T}{c}$	$\frac{a}{c}$
y	$\frac{z_{22}}{\Delta_z}$	$-\frac{z_{12}}{\Delta_z}$	y_{11}	y_{12}	$\frac{1}{h_{11}}$	$-\frac{h_{12}}{h_{11}}$	$\frac{\Delta_g}{g_{22}}$	$\frac{g_{12}}{g_{22}}$	$\frac{D}{B}$	$-\frac{\Delta_T}{B}$	$\frac{a}{b}$	$-\frac{1}{b}$
	$-\frac{z_{21}}{\Delta_z}$	$\frac{z_{11}}{\Delta_z}$	y_{21}	y_{22}	$\frac{h_{21}}{h_{11}}$	$\frac{\Delta_h}{h_{11}}$	$-\frac{g_{21}}{g_{22}}$	$\frac{1}{g_{22}}$	$-\frac{1}{B}$	$\frac{A}{B}$	$-\frac{\Delta_T}{b}$	$\frac{d}{b}$
h	$\frac{\Delta_z}{z_{22}}$	$\frac{z_{12}}{z_{22}}$	$\frac{1}{y_{11}}$	$-\frac{y_{12}}{y_{11}}$	h_{11}	h_{12}	$\frac{g_{22}}{\Delta_g}$	$-\frac{g_{12}}{\Delta_g}$	$\frac{B}{D}$	$\frac{\Delta_T}{D}$	$\frac{b}{a}$	$\frac{1}{a}$
	$-\frac{z_{21}}{z_{22}}$	$\frac{1}{z_{22}}$	$\frac{y_{21}}{y_{11}}$	$\frac{\Delta_y}{y_{11}}$	h_{21}	h_{22}	$-\frac{g_{21}}{\Delta_g}$	$\frac{g_{11}}{\Delta_g}$	$-\frac{1}{D}$	$\frac{C}{D}$	$\frac{\Delta_T}{a}$	$\frac{c}{a}$
g	$\frac{1}{z_{11}}$	$-\frac{z_{12}}{z_{11}}$	$\frac{\Delta_y}{y_{22}}$	$\frac{y_{12}}{y_{22}}$	$\frac{h_{22}}{\Delta_h}$	$-\frac{h_{12}}{\Delta_h}$	g_{11}	g_{12}	$\frac{C}{A}$	$-\frac{\Delta_T}{A}$	$\frac{c}{d}$	$-\frac{1}{d}$
	$\frac{z_{21}}{z_{11}}$	$\frac{\Delta_z}{z_{11}}$	$-\frac{y_{21}}{y_{22}}$	$\frac{1}{y_{22}}$	$-\frac{h_{21}}{\Delta_h}$	$\frac{h_{11}}{\Delta_h}$	g_{21}	g_{22}	$\frac{1}{A}$	$\frac{B}{A}$	$\frac{\Delta_T}{d}$	$-\frac{b}{d}$
T	$\frac{z_{11}}{z_{21}}$	$\frac{\Delta_z}{z_{21}}$	$-\frac{y_{22}}{y_{21}}$	$-\frac{1}{y_{21}}$	$-\frac{\Delta_h}{h_{21}}$	$-\frac{h_{11}}{h_{21}}$	$\frac{1}{g_{21}}$	$\frac{g_{22}}{g_{21}}$	A	B	$\frac{d}{\Delta_T}$	$\frac{b}{\Delta_T}$
	$\frac{1}{z_{21}}$	$\frac{z_{22}}{z_{21}}$	$-\frac{\Delta_y}{y_{21}}$	$-\frac{y_{11}}{y_{21}}$	$-\frac{h_{22}}{h_{21}}$	$-\frac{1}{h_{21}}$	$\frac{g_{11}}{g_{21}}$	$\frac{\Delta_g}{g_{21}}$	C	D	$\frac{c}{\Delta_T}$	$\frac{a}{\Delta_T}$
t	$\frac{z_{22}}{z_{12}}$	$\frac{\Delta_z}{z_{12}}$	$-\frac{y_{11}}{y_{12}}$	$-\frac{1}{y_{12}}$	$\frac{1}{h_{12}}$	$\frac{h_{11}}{h_{12}}$	$-\frac{\Delta_g}{g_{12}}$	$-\frac{g_{22}}{g_{12}}$	$\frac{D}{\Delta_T}$	$\frac{B}{\Delta_T}$	a	b
	$\frac{1}{z_{12}}$	$\frac{z_{11}}{z_{12}}$	$-\frac{\Delta_y}{y_{12}}$	$-\frac{y_{22}}{y_{12}}$	$\frac{h_{22}}{h_{12}}$	$\frac{\Delta_h}{h_{12}}$	$-\frac{g_{11}}{g_{12}}$	$-\frac{1}{g_{12}}$	$\frac{C}{\Delta_T}$	$\frac{A}{\Delta_T}$	c	d

$$\Delta_z = z_{11}z_{22} - z_{12}z_{21},$$

$$\Delta_y = y_{11}y_{22} - y_{12}y_{21},$$

$$\Delta_h = h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21},$$

$$\Delta_g = g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21},$$

$$\Delta_T = AD - BC$$

$$\Delta_T = ad - bc$$

Reciprocidad

A partir de las relaciones ya obtenidas para impedancia y admitancia, utilizando la tabla anterior obtenemos la relación para parámetros híbridos y de transmisión:

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{z}_{12} = \mathbf{z}_{21} \\ \mathbf{y}_{12} = \mathbf{y}_{21} \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{h}_{12} = -\mathbf{h}_{21} \\ \mathbf{g}_{12} = -\mathbf{g}_{21} \\ \mathbf{AD} - \mathbf{BC} = 1 \\ \mathbf{ad} - \mathbf{bc} = 1 \end{array} \right.$$

Simetría

A partir de las relaciones ya obtenidas para impedancia y admitancia, utilizando la tabla anterior obtenemos la relación para parámetros híbridos y de transmisión:

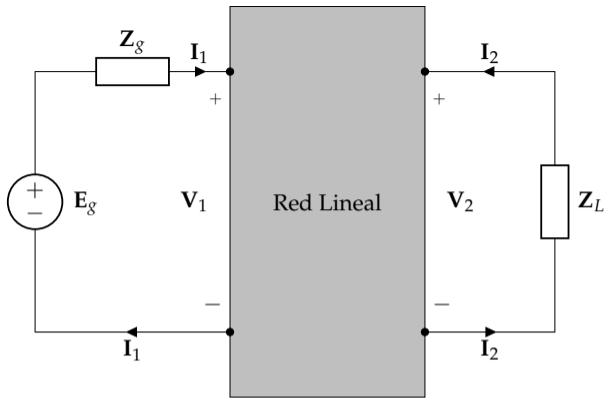
$$\left. \begin{array}{l} z_{11} = z_{22} \\ y_{11} = y_{22} \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{h}_{11} \cdot \mathbf{h}_{22} - \mathbf{h}_{12}^2 = 1 \\ \mathbf{g}_{11} \cdot \mathbf{g}_{22} - \mathbf{g}_{12}^2 = 1 \\ \mathbf{A} = \mathbf{D} \\ \mathbf{a} = \mathbf{d} \end{array} \right.$$

Además:

$$\boxed{[\mathbf{T}] = [\mathbf{t}]}$$

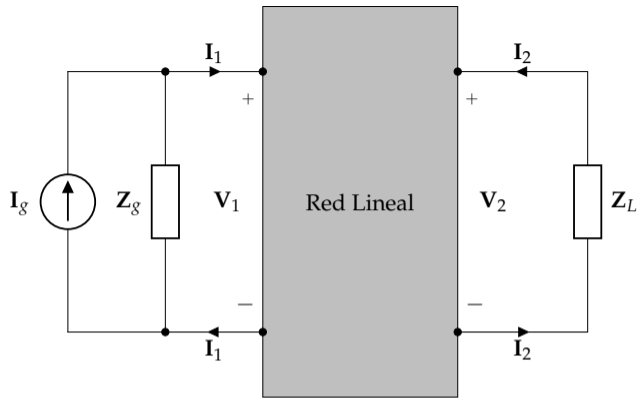
- 1 Introducción
- 2 Parámetros de Cuadripolos
- 3 Relación entre parámetros
- 4 Cuadripolos entre Dipolos Terminales**
- 5 Asociación de Cuadripolos

- ① Introducción
- ② Parámetros de Cuadripolos
- ③ Relación entre parámetros
- ④ Cuadripolos entre Dipolos Terminales
 - Situación General
 - Parámetros Imagen
- ⑤ Asociación de Cuadripolos



$$V_1 = E_g - Z_g \cdot I_1$$

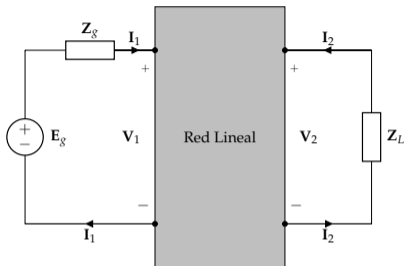
$$V_2 = -Z_L \cdot I_2$$



$$V_1 = (I_g - I_1) \cdot Z_g$$

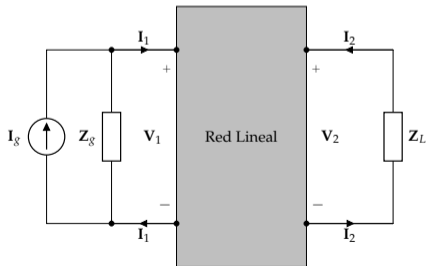
$$V_2 = -Z_L \cdot I_2$$

Ganancia



► Ganancia de Tensión

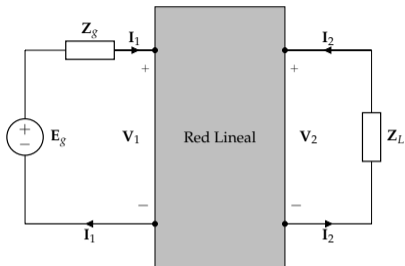
$$A_V = \frac{V_2}{E_g}$$



► Ganancia de Corriente

$$A_I = \frac{I_2}{I_g}$$

Impedancia

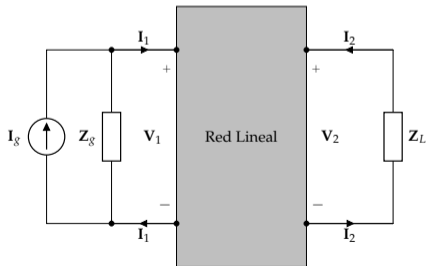


- ▶ Impedancia de Entrada

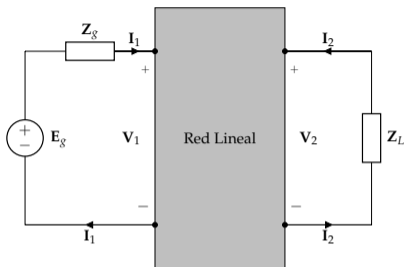
$$Z_i = \frac{V_1}{I_1}$$

- ▶ Impedancia de Salida

$$Z_o = \left. \frac{V_2}{I_2} \right|_{E_g=0}$$



Transferencia

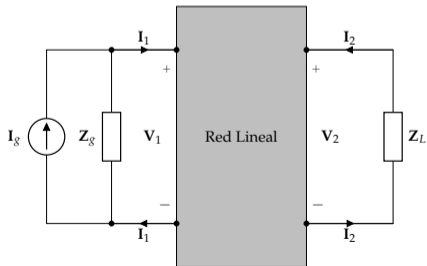


- ▶ Transadmitancia directa

$$Y_f = \frac{I_2}{E_g}$$

- ▶ Transimpedancia directa

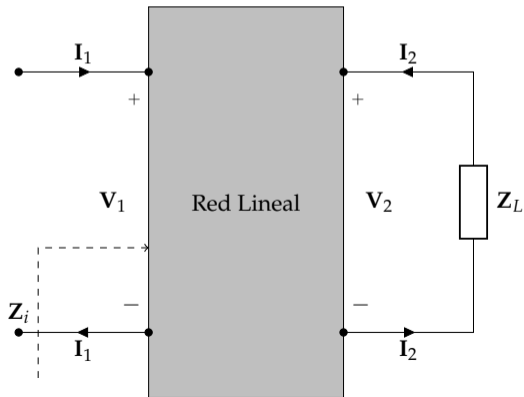
$$Z_f = \frac{V_2}{I_g}$$



Ejercicio de Cálculo (1)

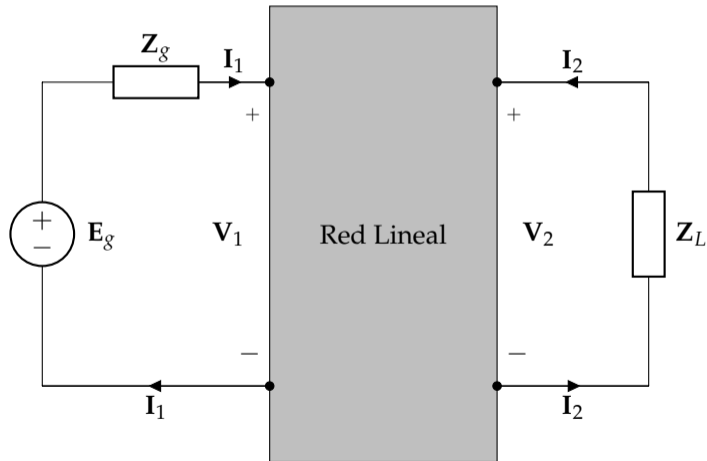
Demuestra que la impedancia de entrada del circuito a la derecha de la fuente real expresada con parámetros de transmisión es:

$$Z_i = \frac{AZ_L + B}{CZ_L + D}$$



Ejercicio de Cálculo (2)

¿Qué impedancia de carga Z_L hay que conectar a la salida del cuadripolo para obtener la máxima transferencia de potencia?



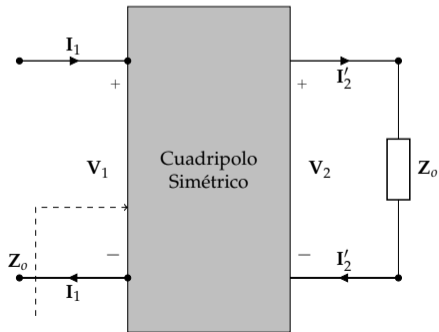
- ① Introducción
- ② Parámetros de Cuadripolos
- ③ Relación entre parámetros
- ④ Cuadripolos entre Dipolos Terminales
 - Situación General
 - Parámetros Imagen
- ⑤ Asociación de Cuadripolos

Impedancia Característica

Para un cuadripolo **recíproco** y **simétrico** se definen los parámetros imagen:

- **Impedancia característica**, Z_0 : impedancia que, conectada en una puerta, hace que desde la otra puerta se vea la misma impedancia.

$$Z_0 = \frac{U_1}{I_1}$$



$$Z_0 = \frac{AZ_0 + B}{CZ_0 + D}$$

$$A = D \rightarrow Z_0 = \pm \sqrt{\frac{B}{C}}$$

Impedancia Característica

Atención

La ecuación proporciona dos soluciones, una de las cuáles implicará una impedancia no viable (*resistencia negativa*).

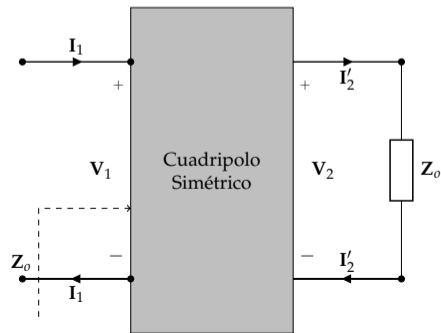
$$Z_0 = \pm \sqrt{\frac{B}{C}}$$

Función de Propagación

Para un cuadripolo **recíproco** y **simétrico** se definen los parámetros imagen:

- **Función de propagación**, γ : relacionada con el cociente de potencias en las puertas del cuadripolo cuando una de ellas está cargada con Z_0

$$\exp(2\gamma) = \frac{U_1 I_1}{U_2 I'_2}$$

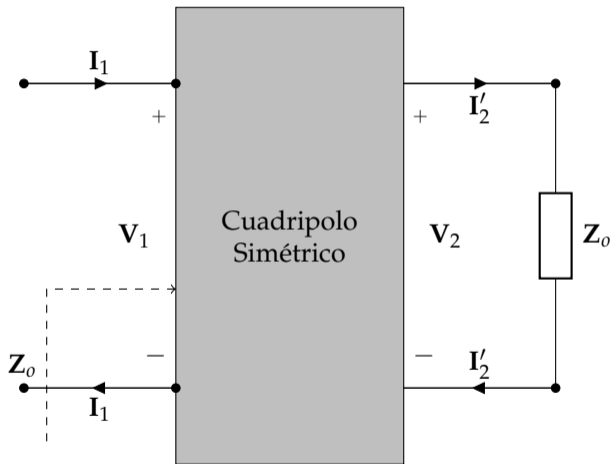


$$U_1 = I_1 Z_0$$

$$U_2 = I'_2 Z_0$$

$$\exp(\gamma) = \frac{U_1}{U_2} = \frac{I_1}{I'_2}$$

Relación entre Z_o y γ



$$\begin{aligned}\exp(\gamma) &= \frac{U_1}{U_2} = \\ &= \frac{AU_2 + BI'_2}{U_2} = \\ &= A + B \frac{I'_2}{U_2}\end{aligned}$$

$$\exp(\gamma) = A + \frac{B}{Z_o}$$

Relación entre Z_o y γ

Teniendo en cuenta la expresión de Z_o :

$$\left. \begin{array}{l} Z_o = \pm \sqrt{\frac{B}{C}} \\ \exp(\gamma) = A + \frac{B}{Z_o} \end{array} \right\} \rightarrow \boxed{\exp(\gamma) = A \pm \sqrt{BC}}$$

Además, teniendo en cuenta la relación de un cuadripolo recíproco y simétrico:

$$A^2 - BC = 1 \rightarrow \boxed{\exp(\gamma) = A \pm \sqrt{A^2 - 1}}$$

Atención al signo que acompaña a las raíces cuadradas. Se debe elegir de forma que la parte real de γ sea acorde al cuadripolo.

Transmisión a partir de Imagen

$$\mathbf{A}^2 - \mathbf{BC} = 1$$

$$e^\gamma = \mathbf{A} + \sqrt{\mathbf{A}^2 - 1}$$

$$\mathbf{Z}_o = \sqrt{\frac{\mathbf{B}}{\mathbf{C}}}$$

$$\cosh(\gamma) = \frac{e^\gamma + e^{-\gamma}}{2}$$

$$\sinh(\gamma) = \frac{e^\gamma - e^{-\gamma}}{2}$$

$$\cosh^2(\gamma) - \sinh^2(\gamma) = 1$$

$\mathbf{A} = \cosh(\gamma)$	$\mathbf{B} = \mathbf{Z}_o \sinh(\gamma)$
$\mathbf{C} = \sinh(\gamma) / \mathbf{Z}_o$	$\mathbf{D} = \cosh(\gamma)$

Régimen Permanente Sinusoidal

Cuando el circuito funciona en régimen permanente sinusoidal:

- ▶ La función de propagación es un número complejo denominado constante de propagación.

$$\bar{\gamma} = \alpha + j\beta$$

- ▶ Las tensiones y corrientes son fasores

$$\exp(\bar{\gamma}) = \exp(\alpha) \cdot \exp(j\beta) = \frac{\bar{U}_1}{\bar{U}_2} = \frac{\bar{I}_1}{\bar{I}_2}$$

Régimen Permanente Sinusoidal

- ▶ **Constante de Atenuación** (cuando $\alpha > 1$ el cuadripolo atenúa la salida respecto de la entrada)

$$\exp(\alpha) = \frac{U_1}{U_2} = \frac{I_1}{I_2}$$

- ▶ **Constante de Fase** (desfase entre puertos)

$$\beta = \theta_{\bar{U}_1} - \theta_{\bar{U}_2} = \theta_{\bar{I}_1} - \theta_{\bar{I}'_2}$$

Atenuación de Potencia

Cuando está conectada la impedancia característica, las potencias activas en los puertos se expresan:

$$P_1 = U_1 I_1 \cos(\theta_o)$$

$$P_2 = U_2 I_2 \cos(\theta_o)$$

donde θ_o es el ángulo de la impedancia \bar{Z}_o .

Por tanto, la relación de potencias activas es:

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{U_1 I_1}{U_2 I_2}$$

Teniendo en cuenta la expresión de la constante de atenuación, esta relación es:

$$\exp(\alpha) = \frac{U_1}{U_2} = \frac{I_1}{I_2} \rightarrow \boxed{\exp(2\alpha) = \frac{U_1 I_1}{U_2 I_2} = \frac{P_1}{P_2}}$$

- ① Introducción
- ② Parámetros de Cuadripolos
- ③ Relación entre parámetros
- ④ Cuadripolos entre Dipolos Terminales
- ⑤ Asociación de Cuadripolos

Conexiones

Definición

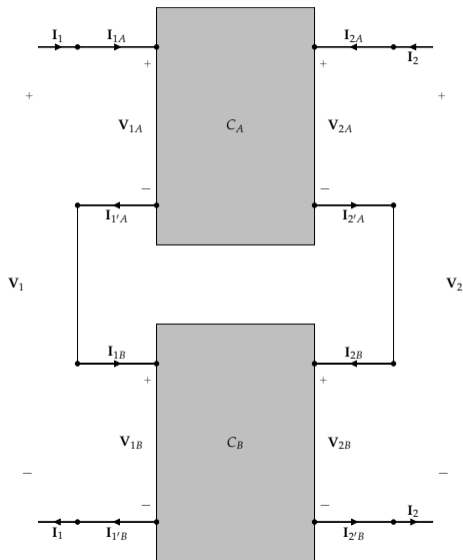
- ▶ **Serie:** misma corriente, suma de tensiones
- ▶ **Paralelo:** misma tensión, suma de corrientes

Catálogo

- ▶ Serie-Serie: **parámetros impedancia**
- ▶ Paralelo-Paralelo: **parámetros admitancia**
- ▶ Serie-Paralelo: **parámetros híbridos**
- ▶ Paralelo-Serie: **parámetros híbridos inversos**
- ▶ Cascada: **parámetros transmisión/imagen**

- 1 Introducción
- 2 Parámetros de Cuadripolos
- 3 Relación entre parámetros
- 4 Cuadripolos entre Dipolos Terminales
- 5 Asociación de Cuadripolos**
 - Asociación Serie-Serie
 - Asociación Paralelo-Paralelo
 - Asociación Serie-Paralelo
 - Asociación Paralelo-Serie
 - Asociación Cascada

Conexión



Tensiones

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_{1A} + \mathbf{V}_{1B}$$

$$\mathbf{V}_2 = \mathbf{V}_{2A} + \mathbf{V}_{2B}$$

Condición de Puerto

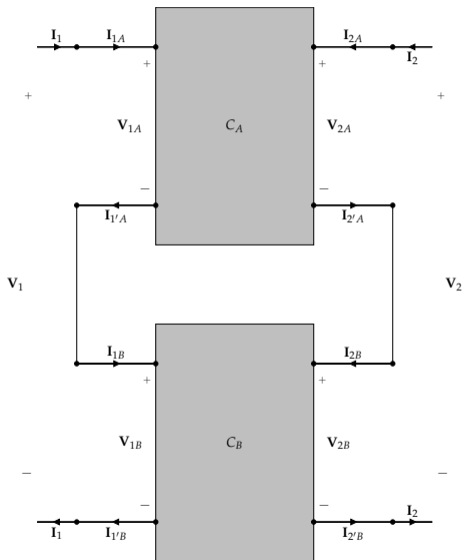
$$\mathbf{I}_{1A} = \mathbf{I}_{1'A}$$

$$\mathbf{I}_{1B} = \mathbf{I}_{1'B}$$

$$\mathbf{I}_{2A} = \mathbf{I}_{2'A}$$

$$\mathbf{I}_{2B} = \mathbf{I}_{2'B}$$

Cuadripolo Equivalente



Parámetros Impedancia

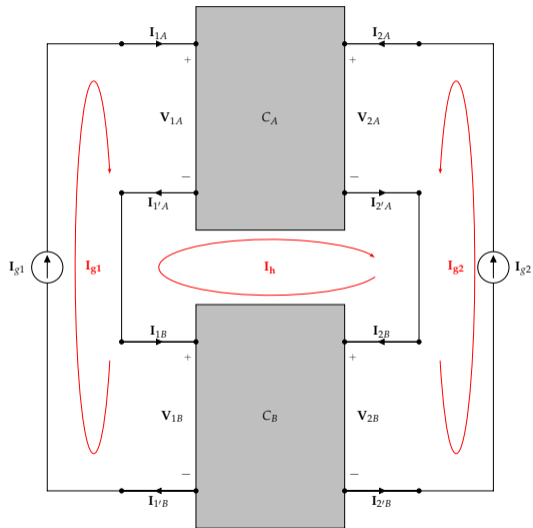
$$[\mathbf{V}_A] = [\mathbf{Z}_A] \cdot [\mathbf{I}_A]$$

$$[\mathbf{V}_B] = [\mathbf{Z}_B] \cdot [\mathbf{I}_B]$$

Cuadripolo Equivalente

$$[\mathbf{Z}] = [\mathbf{Z}_A] + [\mathbf{Z}_B]$$

Interacción



► Entrada

$$I_{1A} = I_{g1}$$

$$I_{1'A} = I_{g1} - I_h$$

► Salida

$$I_{2A} = I_{g2}$$

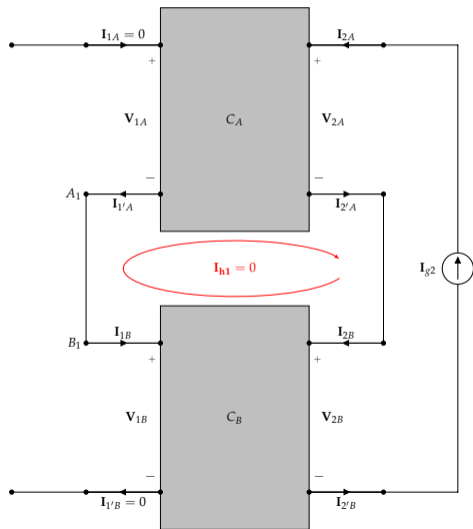
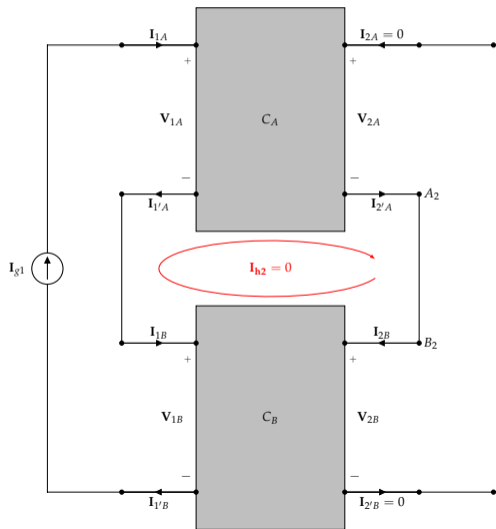
$$I_{2'A} = I_{g2} + I_h$$

► Condición de Puerto

$$I_h = 0$$

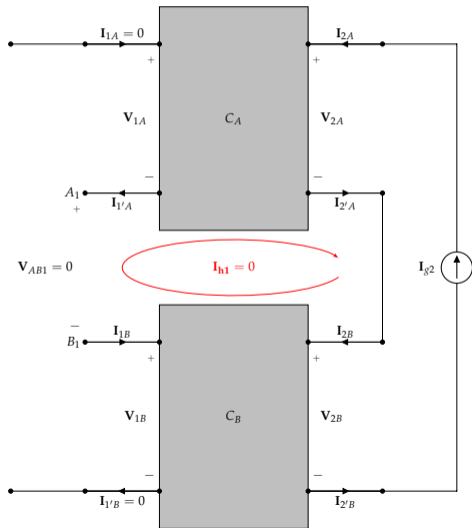
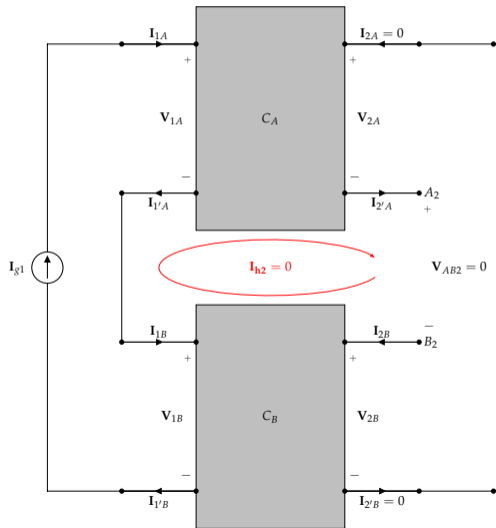
Interacción

Si no hay interacción, al aplicar superposición la corriente de circulación debe ser nula **en ambos casos**.

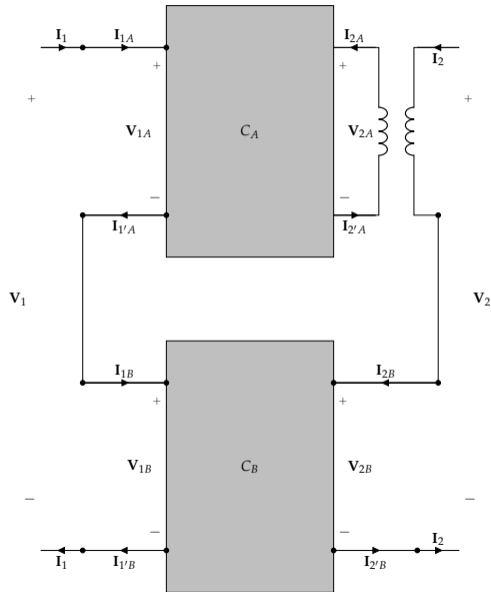


Test de Brune

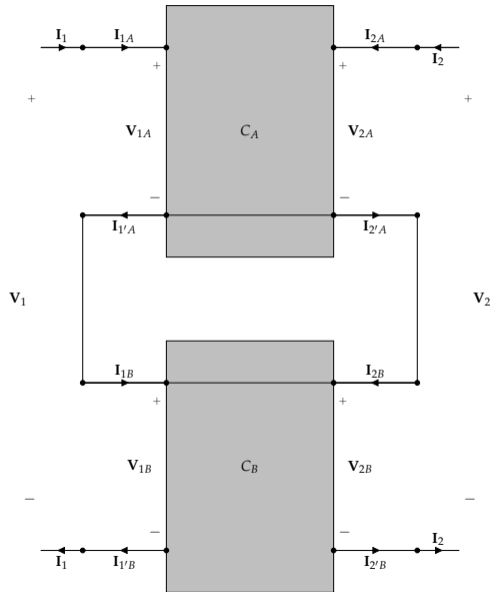
Aplicando superposición desconectamos los cuadripolos: **si no hay interacción, no habrá cambio de tensión.**



Métodos para evitar interacción



Métodos para evitar interacción



- 1 Introducción
- 2 Parámetros de Cuadripolos
- 3 Relación entre parámetros
- 4 Cuadripolos entre Dipolos Terminales

5 Asociación de Cuadripolos

Asociación Serie-Serie

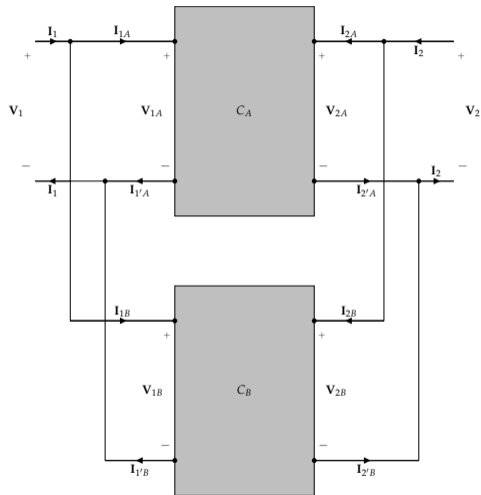
Asociación Paralelo-Paralelo

Asociación Serie-Paralelo

Asociación Paralelo-Serie

Asociación Cascada

Conexión



Corrientes

$$I_1 = I_{1A} + I_{1B}$$

$$I_2 = I_{2A} + I_{2B}$$

Condición de Puerto

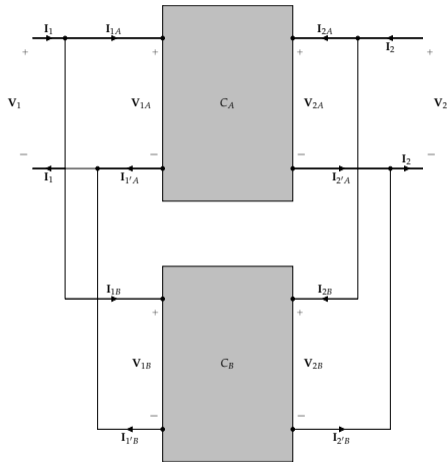
$$I_{1A} = I_{1'A}$$

$$I_{1B} = I_{1'B}$$

$$I_{2A} = I_{2'A}$$

$$I_{2B} = I_{2'B}$$

Cuadripolo Equivalente



Parámetros Admitancia

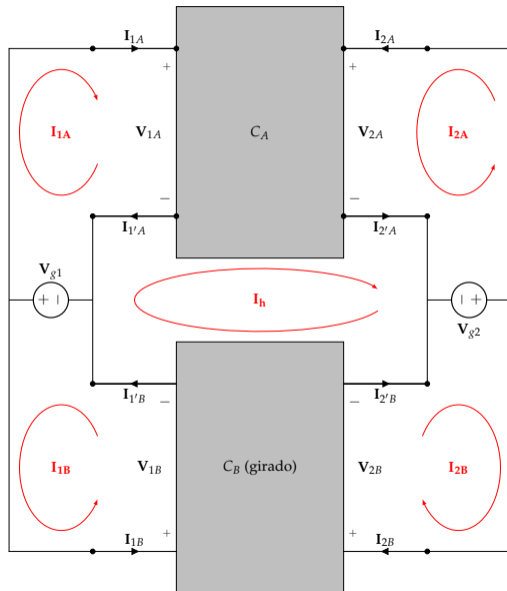
$$[\mathbf{I}_A] = [\mathbf{Y}_A] \cdot [\mathbf{V}_A]$$

$$[\mathbf{I}_B] = [\mathbf{Y}_B] \cdot [\mathbf{V}_B]$$

Cuadripolo Equivalente

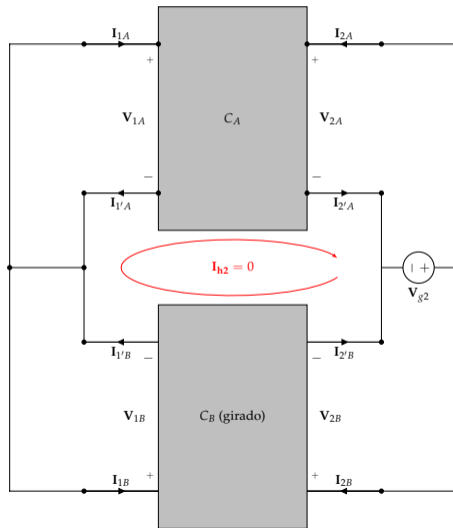
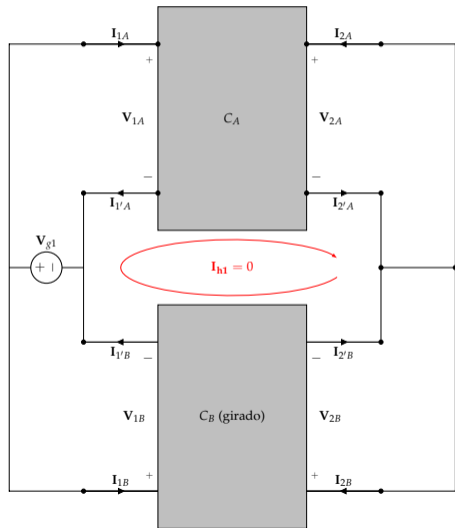
$$[\mathbf{Y}] = [\mathbf{Y}_A] + [\mathbf{Y}_B]$$

Interacción



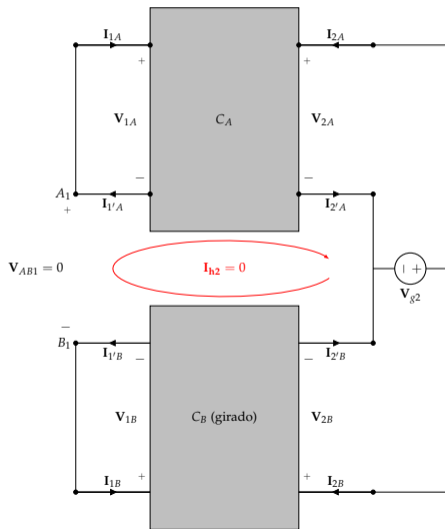
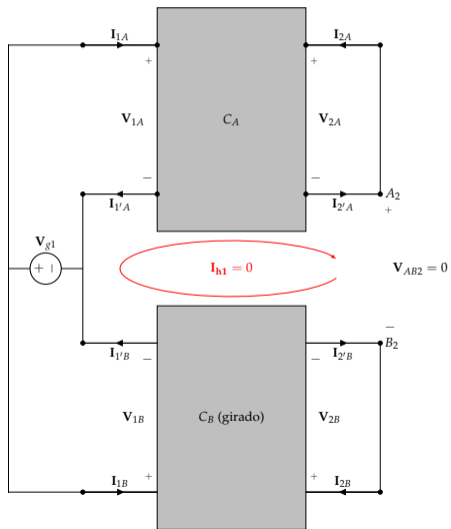
Interacción

Si no hay interacción, al aplicar superposición la corriente de circulación debe ser nula **en ambos casos**.



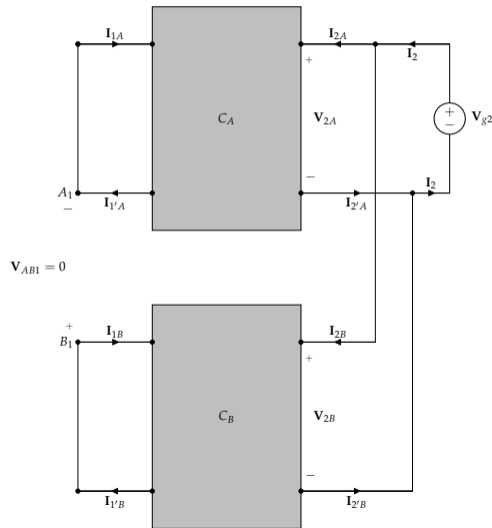
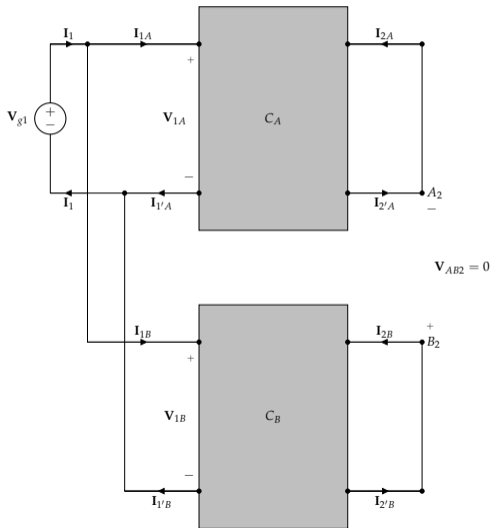
Test de Brune

Aplicando superposición desconectamos los cuadripolos: **si no hay interacción, no habrá cambio de tensión.**

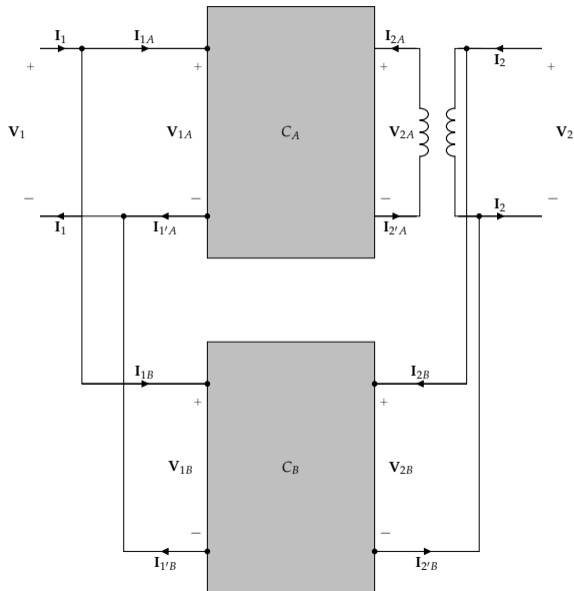


Test de Brune

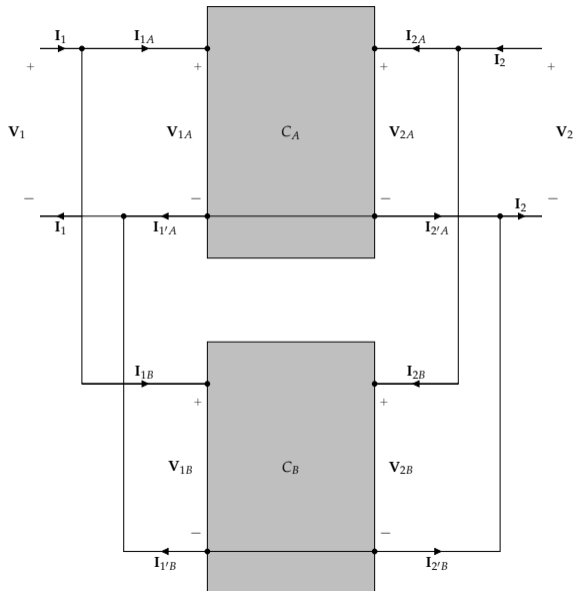
Aplicando superposición desconectamos los cuadripolos: **si no hay interacción, no habrá cambio de tensión.**



Métodos para evitar interacción

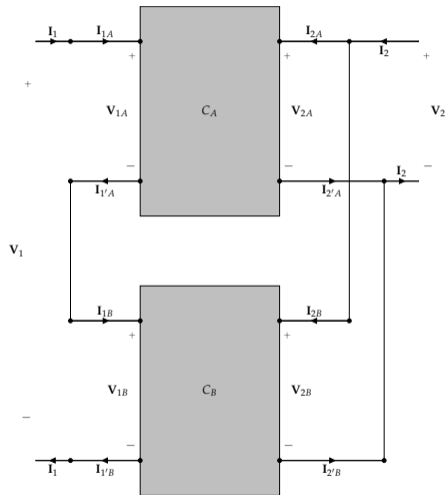


Métodos para evitar interacción



- 1 Introducción
- 2 Parámetros de Cuadripolos
- 3 Relación entre parámetros
- 4 Cuadripolos entre Dipolos Terminales
- 5 Asociación de Cuadripolos**
 - Asociación Serie-Serie
 - Asociación Paralelo-Paralelo
 - Asociación Serie-Paralelo**
 - Asociación Paralelo-Serie
 - Asociación Cascada

Conexión



Relaciones

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_{1A} + \mathbf{V}_{1B}$$

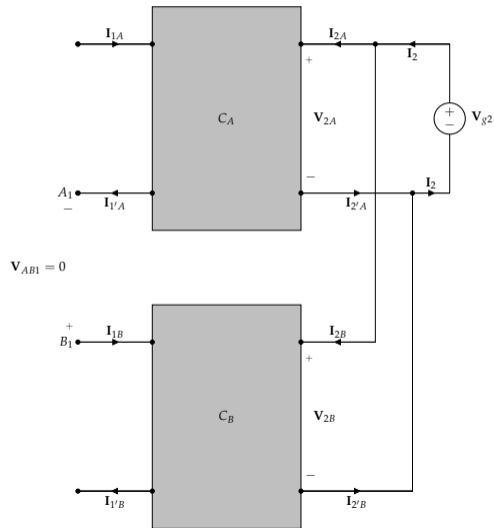
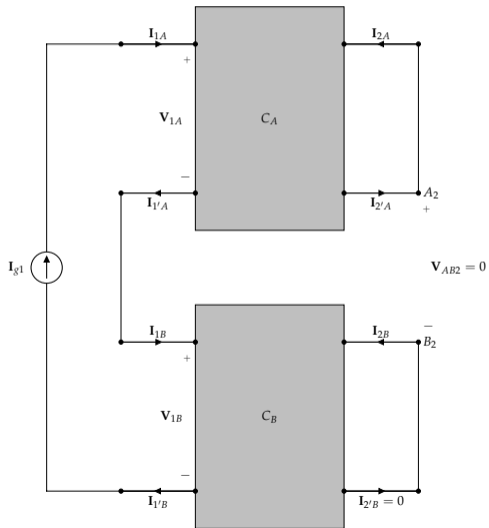
$$\mathbf{I}_2 = \mathbf{I}_{2A} + \mathbf{I}_{2B}$$

Cuadripolo Equivalente

$$[\mathbf{H}] = [\mathbf{H}_A] + [\mathbf{H}_B]$$

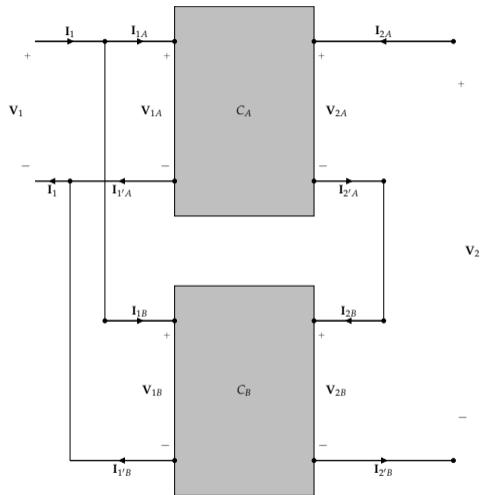
Test de Brune

Aplicando superposición desconectamos los cuadripolos: **si no hay interacción, no habrá cambio de tensión.**



- ① Introducción
- ② Parámetros de Cuadripolos
- ③ Relación entre parámetros
- ④ Cuadripolos entre Dipolos Terminales
- ⑤ Asociación de Cuadripolos**
 - Asociación Serie-Serie
 - Asociación Paralelo-Paralelo
 - Asociación Serie-Paralelo
 - Asociación Paralelo-Serie**
 - Asociación Cascada

Conexión



Relaciones

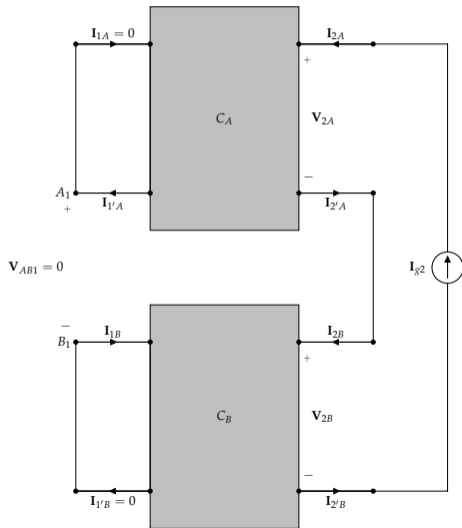
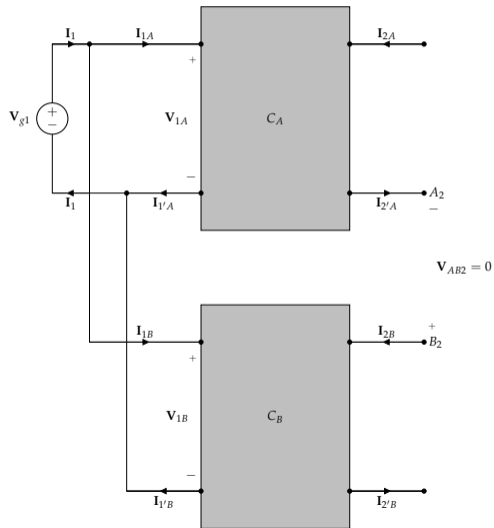
$$\mathbf{I}_1 = \mathbf{I}_{1A} + \mathbf{I}_{1B}$$
$$\mathbf{V}_2 = \mathbf{V}_{2A} + \mathbf{V}_{2B}$$

Cuadripolo Equivalente

$$[\mathbf{G}] = [\mathbf{G}_A] + [\mathbf{G}_B]$$

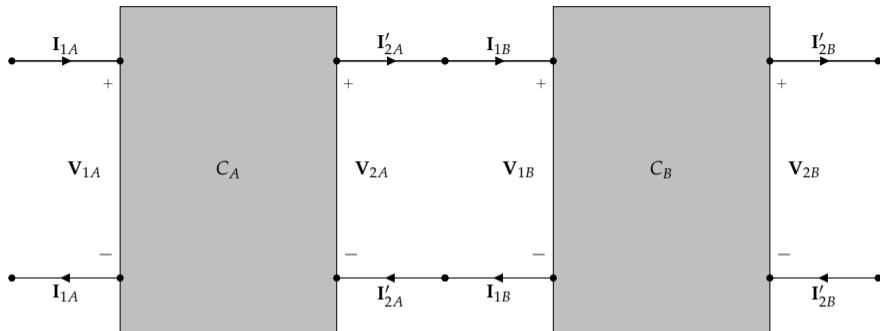
Test de Brune

Aplicando superposición desconectamos los cuadripolos: **si no hay interacción, no habrá cambio de tensión.**



- ① Introducción
- ② Parámetros de Cuadripolos
- ③ Relación entre parámetros
- ④ Cuadripolos entre Dipolos Terminales
- ⑤ Asociación de Cuadripolos**
 - Asociación Serie-Serie
 - Asociación Paralelo-Paralelo
 - Asociación Serie-Paralelo
 - Asociación Paralelo-Serie
 - Asociación Cascada**

Conexión



$$V_{2A} = V_{1B}$$

$$I'_{2A} = I_{1B}$$

$$[\mathbf{T}] = [\mathbf{T}_A] \cdot [\mathbf{T}_B]$$